

CYKlickÉ KřIVKY

Cyklické křivky patří především mezi technické křivky. Mají bohatou historii. První zmínku nacházíme dokonce už u Ptolemáia, konkrétnější studie pak v 17. století v pracích Christiaana Huygense. Později se jimi zabývali další významní fyzici a matematikové např. Newton, Leibniz, Bernoulli, ale i architekti jako byl sir Christopher Wren.

Cyklické křivky jsou rovinné křivky. Cyklickou křivkou nazveme trajektorii bodu pevně spojeného s „kotálející se“ kružnicí (nebo přímkou) po nehybné křivce. Nehybnou křivkou může být opět přímka nebo kružnice.

Podle toho, která křivka je pevná a která se kotálí, rozlišujeme:

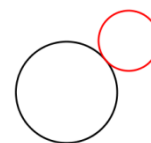
1.) **Cykloidy**

kružnice po přímce



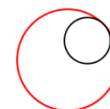
2.) **Epicykloidy**

kružnice po kružnici s vnějším dotykem



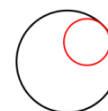
3.) **Hypocykloidy**

kružnice po kružnici s vnitřním dotykem po vnitřní straně



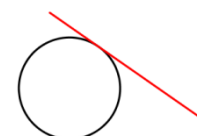
4.) **Pericykloidy**

kružnice po kružnici s vnitřním dotykem po vnější straně



5.) **Evolventa**

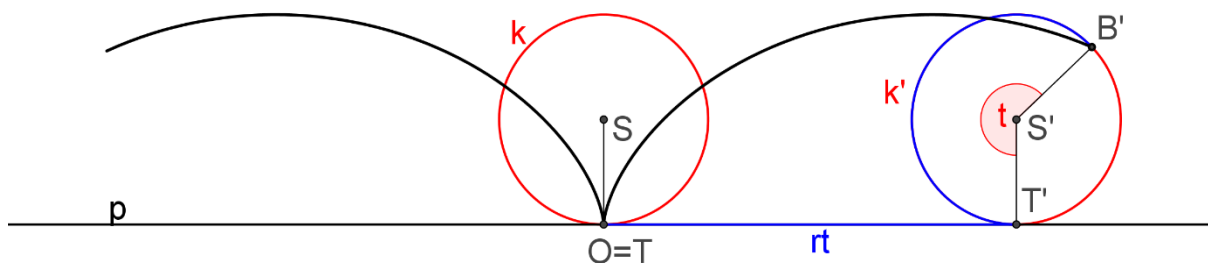
přímka okolo kružnice



V následujícím textu se budeme jednotlivým křivkám věnovat podrobněji.

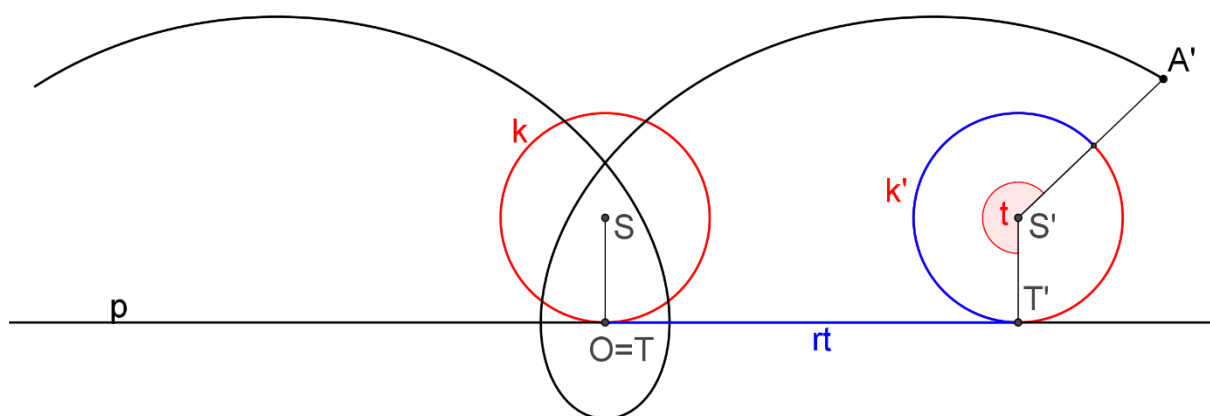
Ukázky jednotlivých typů cykloid a jejich vytváření lze nalézt v [GeoGebra modelu](#).

- Cykloidu nazýváme **prostou**, pokud $d = r$ (obr. 2).



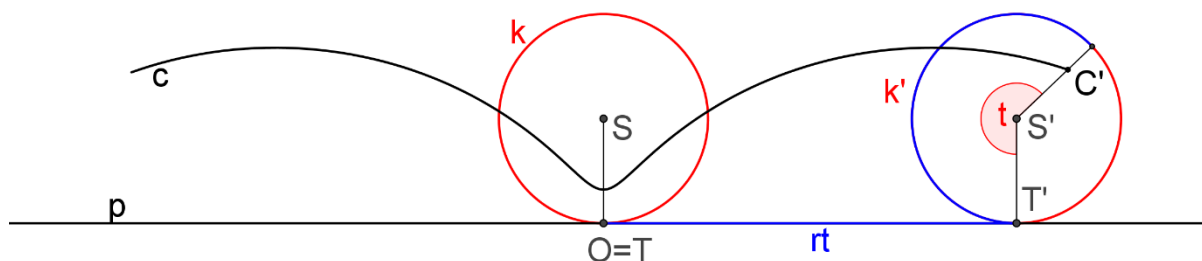
Obr. 2

- Cykloidu nazýváme **prodlouženou**, pokud $d > r$ (obr. 3).



Obr. 3

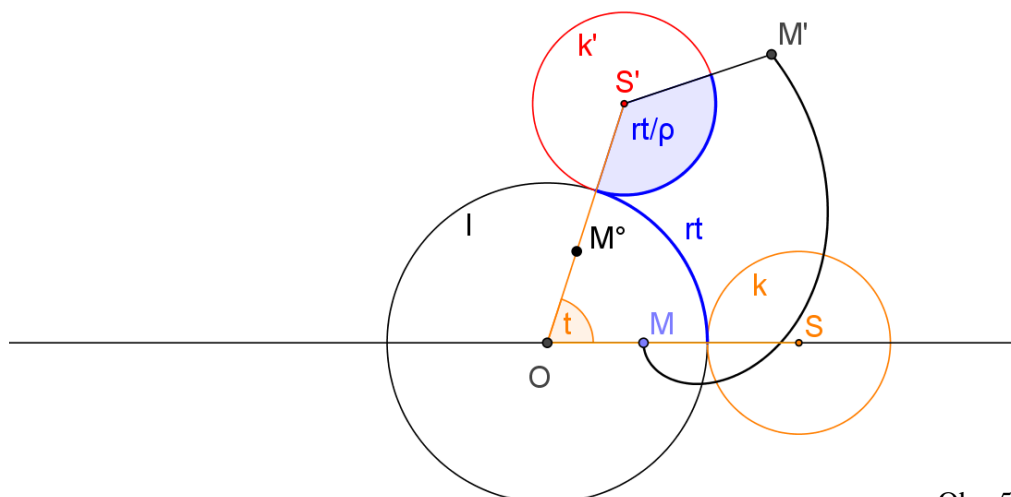
- Cykloidu nazýváme **zkrácenou**, pokud $d < r$ (obr. 4).



Obr. 4

2. Epicykloidy

Nechť je dána **pevná kružnice** $l(O; r)$, kde $O[0; 0]$ a **hybná kružnice** $k(S; \rho)$, kde $S[r + \rho; 0]$. Bod M zvolme na polopřímce \overline{OS} (obr. 5).



Obr. 5

Pokud vzdálenost bodu M od středu S kružnice k označíme d , pak souřadnice bodu M budou $M[r + \rho - d; 0]$.

Epicykloidální pohyb vzniká opět složením dvou shodných zobrazení, tentokrát:

- **Rotace** $R(O; t)$, kterou zapíšeme maticovou rovnicí

$$\begin{pmatrix} x^{\circ} \\ y^{\circ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Střed S se zobrazí na $S^{\circ}[(r + \rho) \cos t; (r + \rho) \sin t] = S'$ a bod M bude mít po otočení souřadnice $M^{\circ}[(r + \rho - d) \cos t; (r + \rho - d) \sin t]$.

- **Rotace** $R(S'; \frac{rt}{\rho})$, která má maticovou rovnicí

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{rt}{\rho} & -\sin \frac{rt}{\rho} \\ \sin \frac{rt}{\rho} & \cos \frac{rt}{\rho} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_{S'} \\ y - y_{S'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{S'} \\ y_{S'} \end{pmatrix}.$$

A protože $M^{\circ} - S' = (-d \cos t; -d \sin t)$, dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} x(t) &= -d \cos t \cos \frac{rt}{\rho} - d \sin t \sin \frac{rt}{\rho} + (r + \rho) \sin t \\ y(t) &= -d \cos t \sin \frac{rt}{\rho} - d \sin t \cos \frac{rt}{\rho} + (r + \rho) \sin t, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Po užití součtových vzorců pro úpravu dostáváme konečné rovnice:

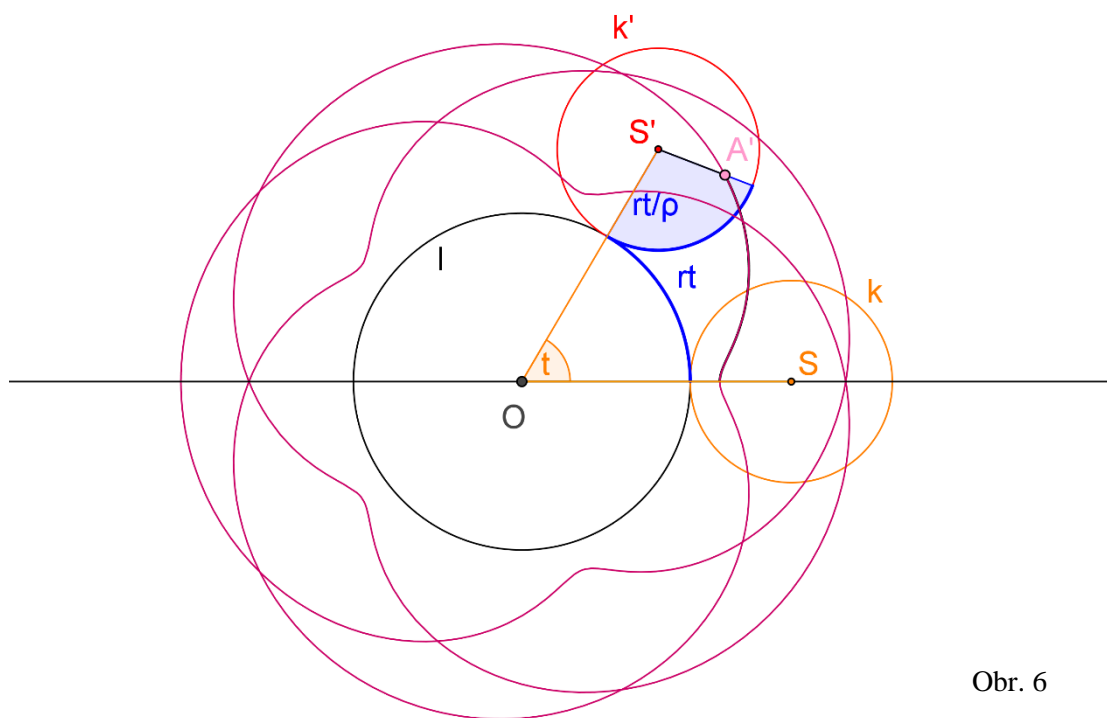
$$x(t) = (r + \rho) \cos t - d \cos \frac{(r+\rho)t}{\rho}$$

$$y(t) = (r + \rho) \sin t - d \sin \frac{(r+\rho)t}{\rho}, t \in \mathbb{R}.$$

Pokud poměr poloměrů pevné a pohyblivé kružnice $\frac{r}{\rho} = \frac{\lambda}{\kappa}$ je racionální číslo, kde λ, κ jsou nesoudělná čísla, je epicykloida uzavřenou křivkou. Pohyblivá kružnice „oběhne“ pevnou kružnici κ -krát a λ -krát se otočí kolem svého středu. Je-li $\frac{\lambda}{\kappa}$ iracionální číslo, křivka je neuzavřená.

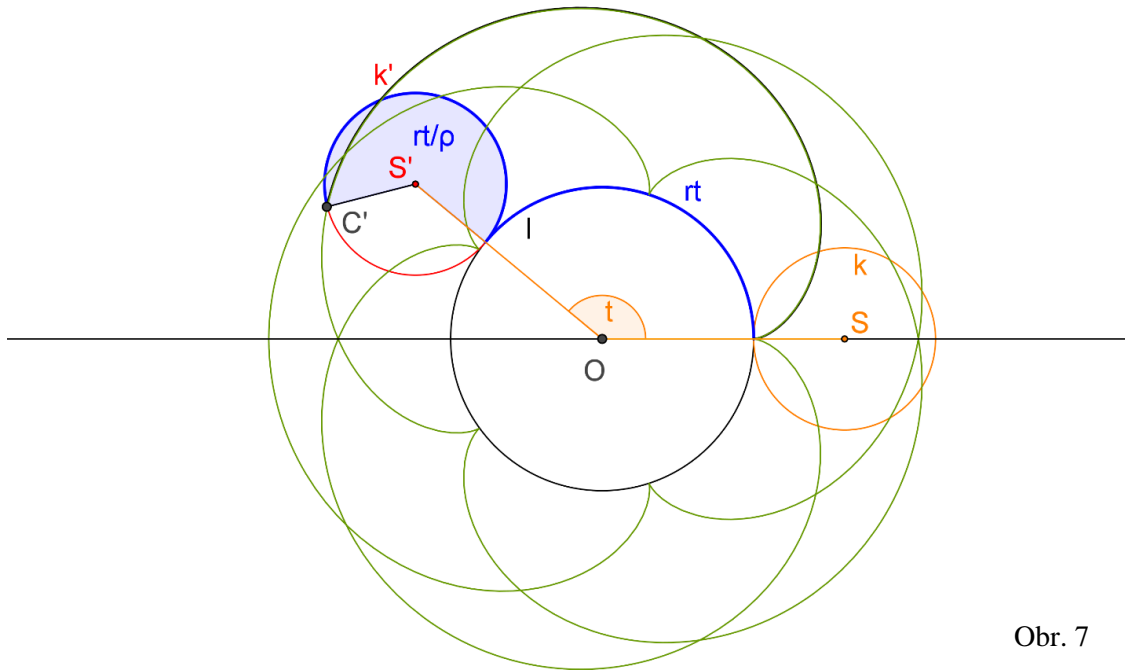
Ukázky jednotlivých typů epicykloid lze nalézt v příslušném [GeoGebra modelu](#).

- Opět rozlišujeme **zkrácenou** epicykloidu, je-li $\rho > d$ (obr. 6),



Obr. 6

- a **prostou** epicykloidu, je-li $\rho = d$ (obr. 7).



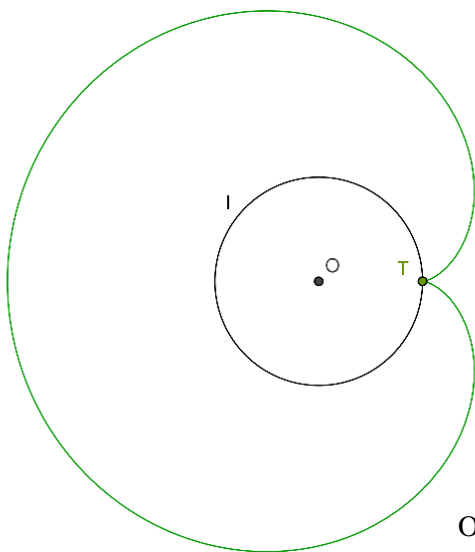
Obr. 7

Speciálními případy prosté epicykloidy jsou

kardioida (srdcovka), kde $r = \rho$ (obr. 8)

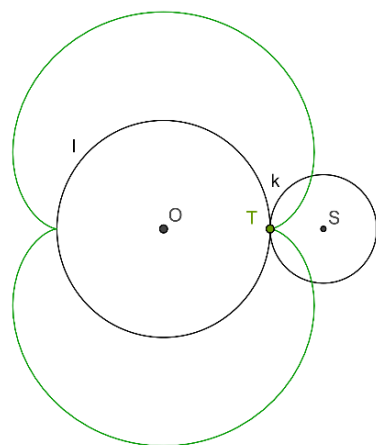
a

nefroida, kde $r = 2\rho$ (obr. 9).



Obr. 8

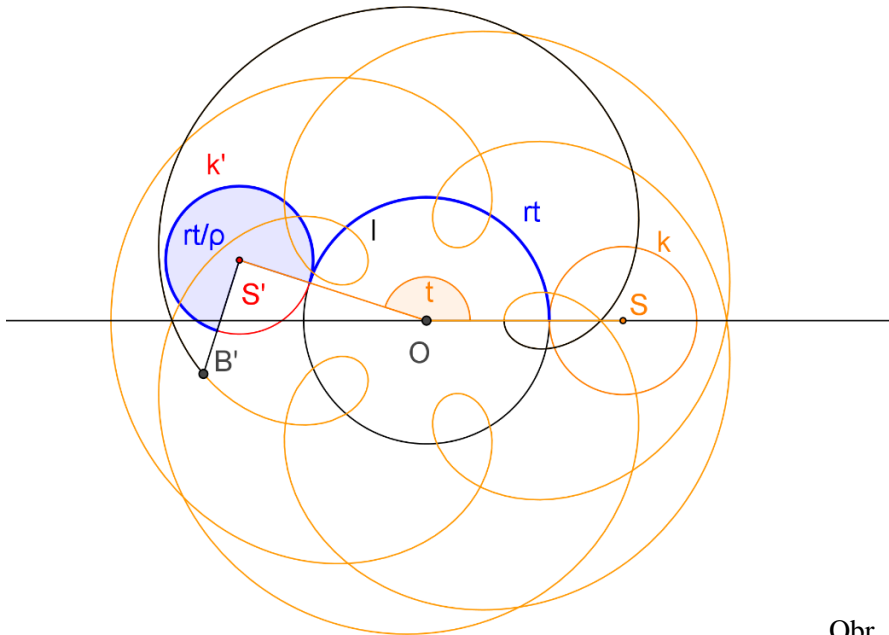
$$\begin{aligned} x(t) &= 2\rho \cos t - \rho \cos 2t \\ y(t) &= 2\rho \sin t - \rho \sin 2t, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Obr. 9

$$\begin{aligned} x(t) &= 3\rho \cos t - \rho \cos 3t \\ y(t) &= 3\rho \sin t - \rho \sin 3t, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

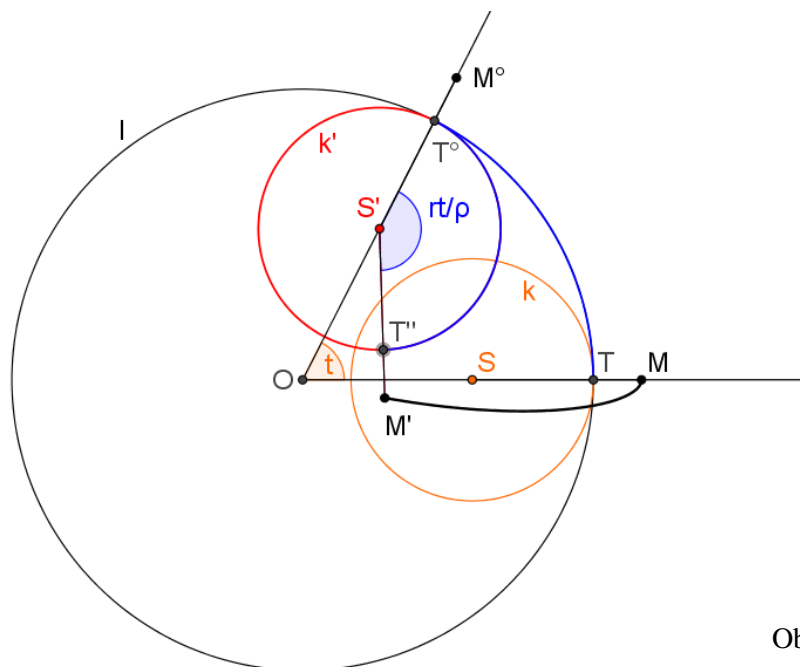
- A nakonec dostáváme **prodlouženou** epicykloidu, je-li $\rho < d$ (obr. 10)



Obr. 10

3. Hypocykloidy

Nechť je dána **pevná kružnice** $l(O; r)$, kde $O[0; 0]$ a **hybná kružnice** $k(S; \rho)$, kde $S[r - \rho; 0]$.
Bod M zvolme na polopřímce \overrightarrow{OS} (obr. 11).



Obr. 11

Vzdálenost bodu M od středu S kružnice k označíme opět d . Souřadnice bodu M pak budou

$$M[r - \rho + d; 0].$$

Hypocykloidální pohyb vzniká opět složením dvou shodných zobrazení:

- **Rotace** $R(O; t)$, kterou zapíšeme maticovou rovnicí

$$\begin{pmatrix} x^\circ \\ y^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Střed S se zobrazí na $S^\circ[(r - \rho) \cos t; (r - \rho) \sin t] = S'$ a bod M bude mít souřadnice $M^\circ[(r - \rho + d) \cos t; (r - \rho + d) \sin t]$.

- **Rotace** $R(S'; -\frac{rt}{\rho})$, která má maticovou rovnicí

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{rt}{\rho} & \sin \frac{rt}{\rho} \\ -\sin \frac{rt}{\rho} & \cos \frac{rt}{\rho} \end{pmatrix} \frac{rt}{\rho} \cdot \begin{pmatrix} x - x_{S'} \\ y - y_{S'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{S'} \\ y_{S'} \end{pmatrix}.$$

A protože $M^\circ - S' = (d \cos t; d \sin t)$, dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} x(t) &= d \cos t \cos \frac{rt}{\rho} + d \sin t \sin \frac{rt}{\rho} + (r - \rho) \sin t \\ y(t) &= -d \cos t \sin \frac{rt}{\rho} + d \sin t \cos \frac{rt}{\rho} + (r - \rho) \sin t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

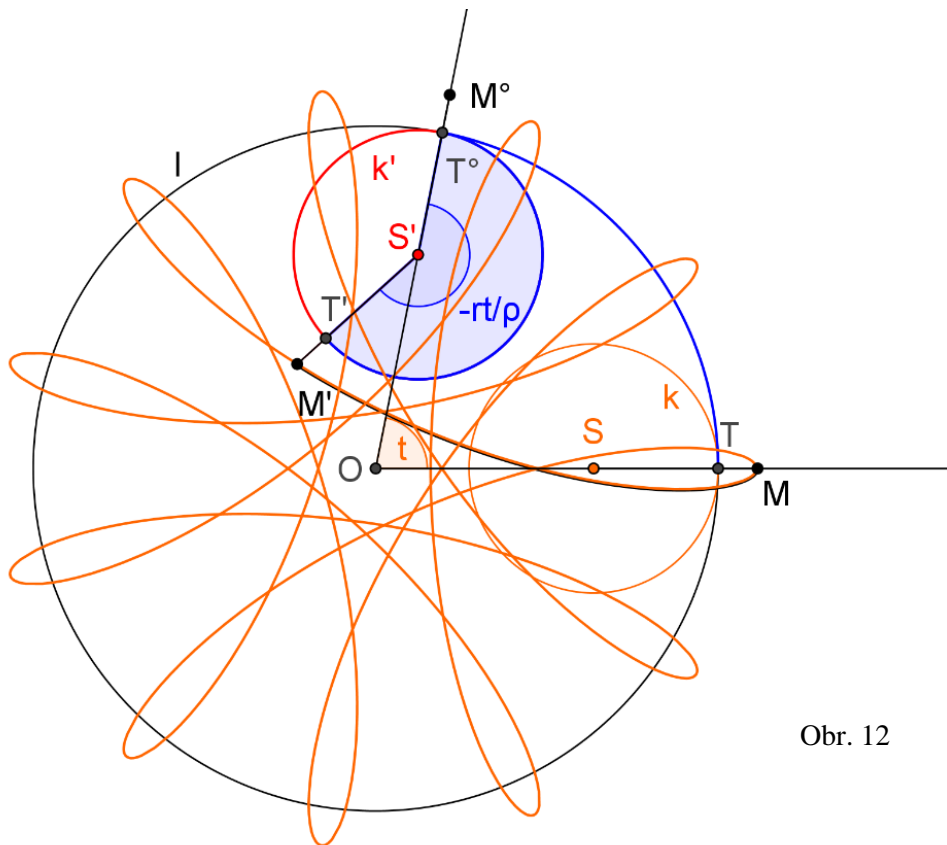
Po užití součtových vzorců pro úpravu dostáváme konečné rovnice:

$$\begin{aligned} x(t) &= (r - \rho) \cos t + d \cos \frac{(r - \rho)t}{\rho} \\ y(t) &= (r - \rho) \sin t - d \sin \frac{(r - \rho)t}{\rho}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

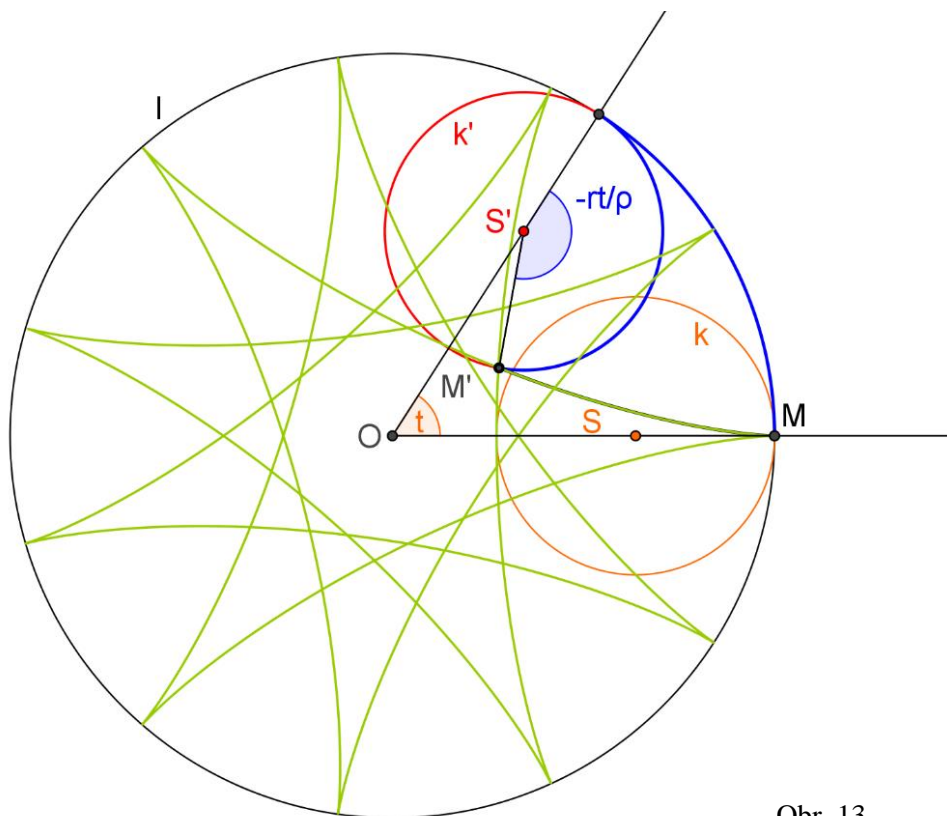
Zda bude hypocykloida uzavřená či ne, bude stejně jako u epicykloid záviset na poměru poloměrů pevné a hybné kružnice. Podle polohy bodu M i v tomto případě budeme rozlišovat 3 typy hypocykloid:

- **prodloužená** hypocykloida, je-li $\rho < d$ (obr. 12),
- **prostá** hypocykloida, je-li $\rho = d$ (obr. 13),
- **zkrácená** hypocykloida, je-li $\rho > d$ (obr. 14).

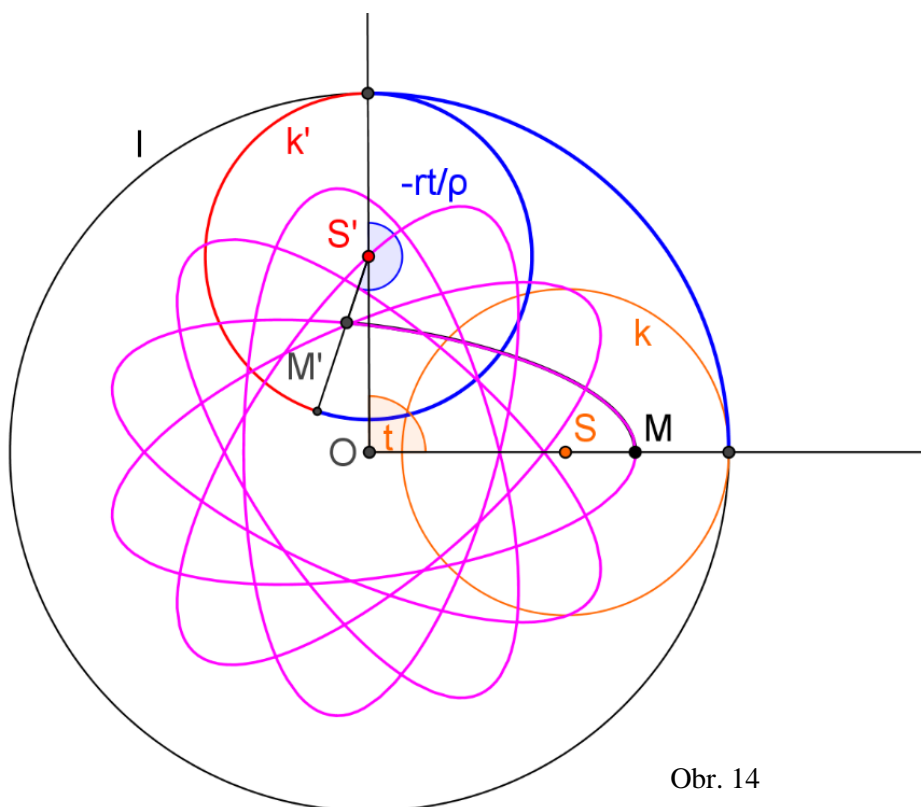
Ukázky jednotlivých typů hypocykloid lze nalézt opět v příslušném  [GeoGebra modelu](#).



Obr. 12

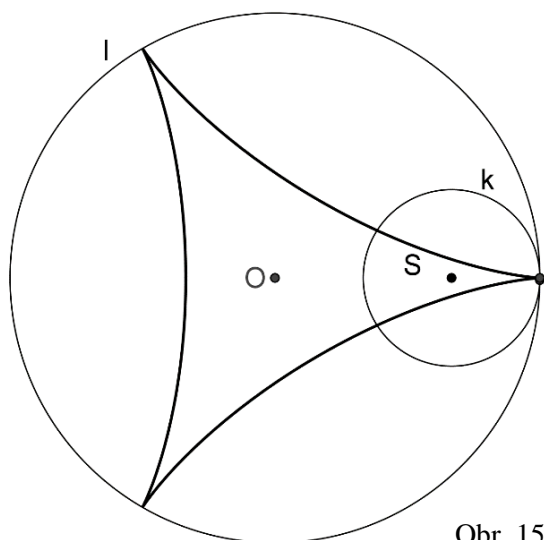


Obr. 13

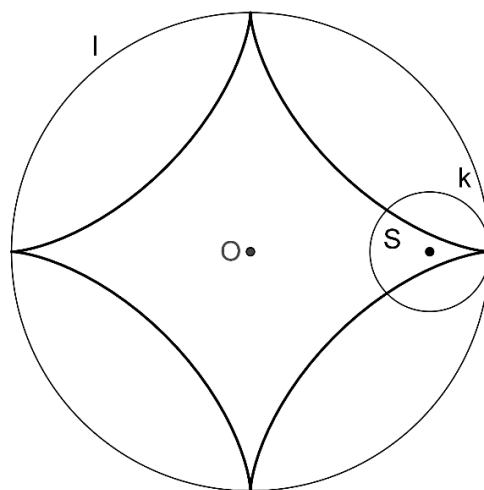


Obr. 14

Mezi zvláštní případy prosté hypocykloidy patří **Steinerova hypocykloida**, tj. $r = 3\rho$ (obr. 15) a **asteroida**, tj. $r = 4\rho$ (obr. 16).



Obr. 15



Obr. 16

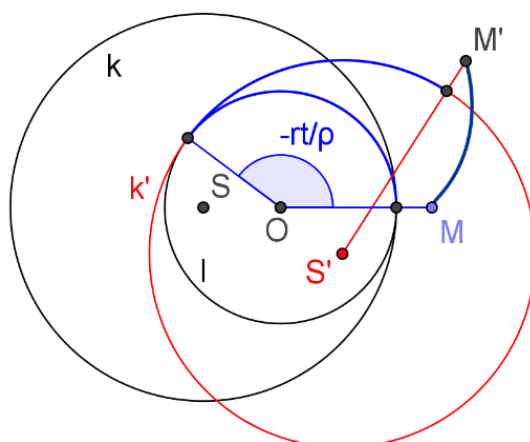
$$\begin{aligned} x(t) &= 2\rho \cos t + \rho \cos 2t \\ y(t) &= 2\rho \sin t + \rho \sin 2t, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= 3\rho \cos t + \rho \cos 3t \\ y(t) &= 3\rho \sin t + \rho \sin 3t, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Pokud $r = 2\rho$ hypocykloidou je průměr pevné kružnice, tedy úsečka.

4. Pericykloidy

Pevná kružnice $l(O; r)$ je uvnitř **hybné kružnice** $k(S; \rho)$, jak je vidět na obr.17.



Obr. 17

Pericykloidální pohyb vzniká složením rotací $R(O; t)$ a $R(S'; -\frac{rt}{\rho})$. Postupujeme stejně jako u předchozích pohybů a po úpravách dostaneme rovnice:

$$\begin{aligned} x(t) &= (r - \rho) \cos t + d \cos \frac{(\rho - r)t}{\rho}, \\ y(t) &= (r - \rho) \sin t + d \sin \frac{(\rho - r)t}{\rho}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Podrobněji se pericykloidám věnovat nebudeme, protože každou pericykloidu můžeme vyjádřit jako epicykloidu. Do rovnic pro epicykloidu

$$\begin{aligned} x(s) &= (r' + \rho') \cos s - d' \sin \frac{(r' + \rho')s}{\rho'} \\ y(s) &= (r' + \rho') \sin s - d' \sin \frac{(r' + \rho')s}{\rho'}, \quad s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dopočítáme parametry

$$d' = \rho - r, \quad \rho' = \frac{d(\rho + r)}{\rho}, \quad r' = \frac{dr}{\rho}, \quad s = \frac{(\rho - r)t}{\rho}.$$

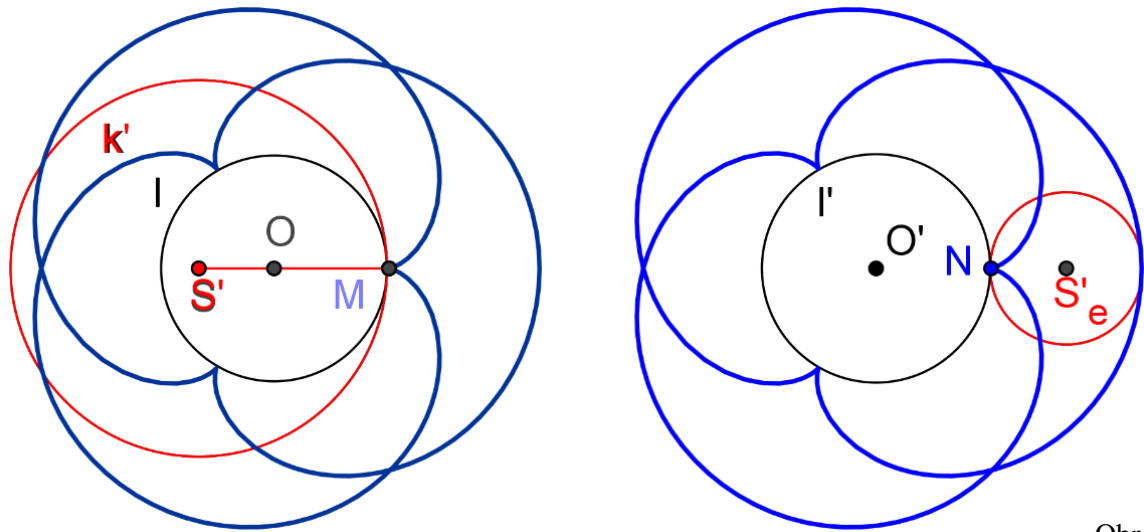
Uveďme si příklad (viz obr. 18):

pericykloida: $r = 3, \rho = 5, d = 5$

$$\begin{aligned} x(t) &= -2 \cos t + 5 \cos \frac{2t}{5} \\ y(t) &= -2 \sin t + 5 \sin \frac{2t}{5}, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

epicykloida: $r' = 3, \rho' = 2, d' = 2$

$$\begin{aligned} x(s) &= 5 \cos s - 2 \cos \frac{5s}{2} \\ y(s) &= 5 \sin s - 2 \sin \frac{5s}{2}, \quad s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

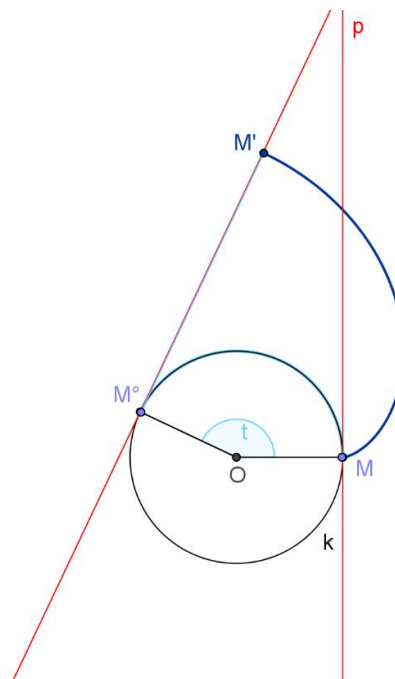


Obr. 18

Ukázky jednotlivých typů pericykloid i jejich převedení na epicykloidy lze nalézt opět v příslušném [GeoGebra modelu](#).

5. Evolventy

Evoventa je cyklická křivka, která patří zároveň mezi spirály. **Kružnice** $k(O[0; 0]; r)$ je **pevná** a **přímka** $p: x = r$ se po ní **kotálí** (obr. 19). Evolventou je pak trajektorie bodu $M[r; 0]$.



Obr. 19

Rovnice dostaneme složením rotace $R(O; t)$ a posunutí $T(\vec{w}(t))$, kde $\vec{w}(t) = (M' - M^\circ)$, tj. vektor $\vec{w}(t)$ bude měnit směr i velikost v závislosti na t . Vektor $\vec{w}(t)$ je směrový vektor tečny v bodě M° o velikosti rt . Odtud plyne, že $\vec{w}(t) = (rt \sin t; -rt \cos t)$ a tudíž dostáváme rovnice evolventy:

$$\begin{aligned}x(t) &= r \cos t + rt \sin t \\y(t) &= r \sin t - rt \cos t, t \in \mathbb{R}_+^0.\end{aligned}$$

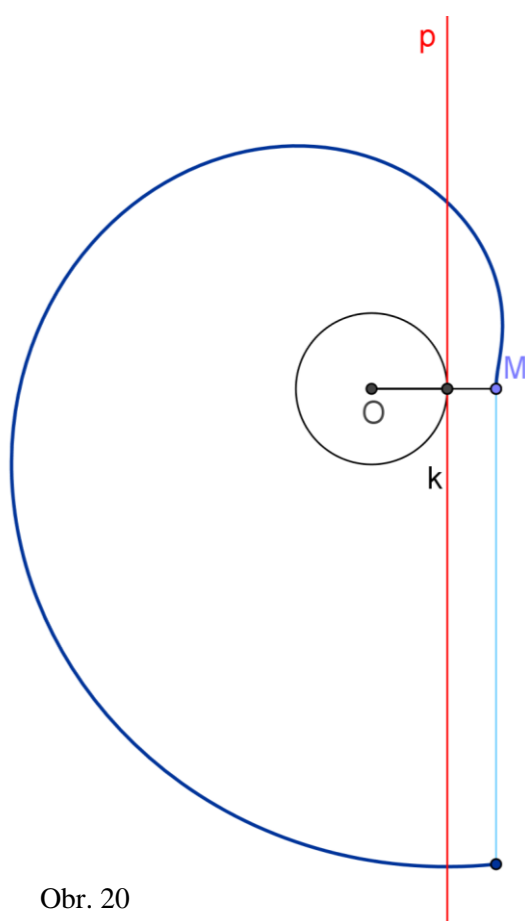
Popsaná křivka se nazývá **prostá evolventa**, neboť $M \in p$. Bod M by mohl ležet mimo přímku p , pak bychom jako v předchozích případech rozlišovali:

- Prodlouženou evolventu (obr. 20): $x(t) = (r + d) \cos t + rt \sin t$
 $y(t) = (r + d) \sin t - rt \cos t, t \in \mathbb{R}_+^0,$

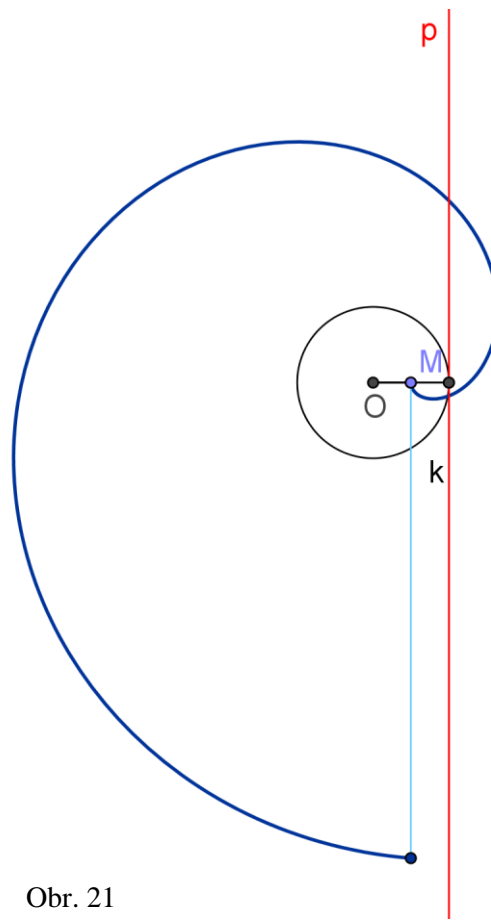
kde $d = x_M - r > 0$.

- Zkrácenou evolventu (obr. 21): $x(t) = (r - d) \cos t + rt \sin t$
 $y(t) = (r - d) \sin t - rt \cos t, t \in \mathbb{R}_+^0,$

kde $d = r - x_M > 0$.



Obr. 20



Obr. 21

Ukázky vytváření evolventy a jejich typů lze nalézt v příslušném [GeoGebra modelu](#).

6. Závěr

S popsanými křivkami se můžeme setkat i v jiných souvislostech. Například prostou evolventu dostaneme jako řez plochy tečen šroubovice rovinou kolmou k ose šroubového pohybu (obr. 22).

Rovnice plochy tečen šroubovice bodu $A[3,0,0]$ v pravotočivém šroubovém pohybu s osou $o = z$ a redukovanou výškou závitu $v_0 = 2$ jsou

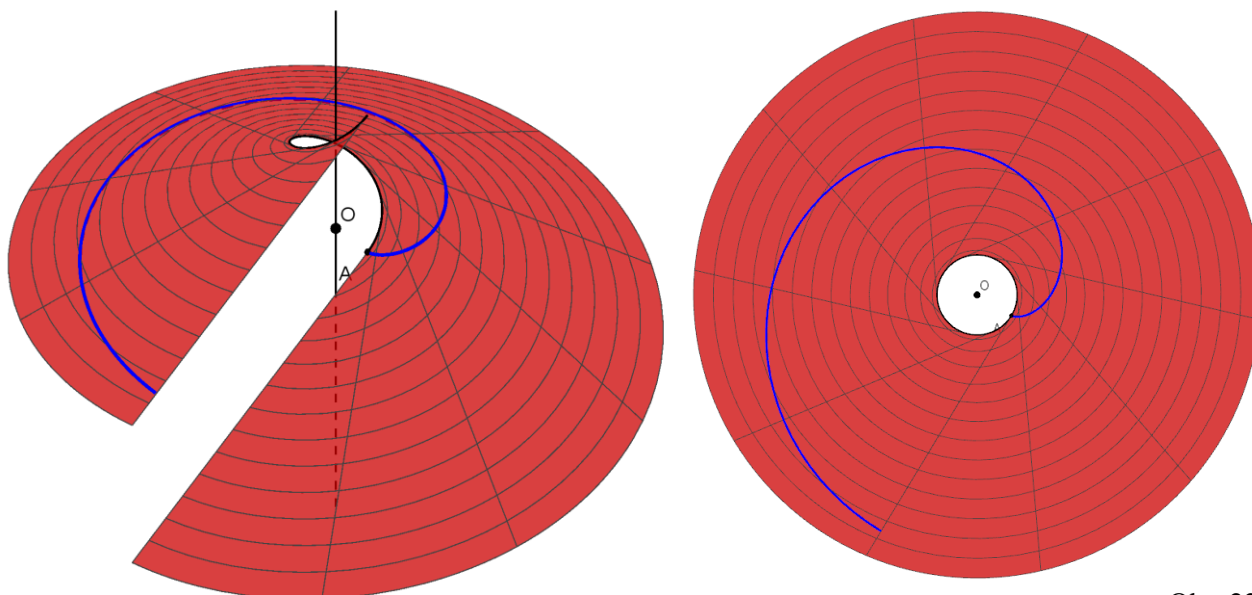
$$\begin{aligned}x(t, s) &= 3 \cos t - 3s \sin t \\y(t, s) &= 3 \sin t + 3s \cos t \\z(t, s) &= 2t + 2s, \quad t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Pro řez rovinou $\pi: z = 0$ platí $2t + 2s = 0$, tedy $s = -t$.

A tak dostáváme rovnice křivky k :

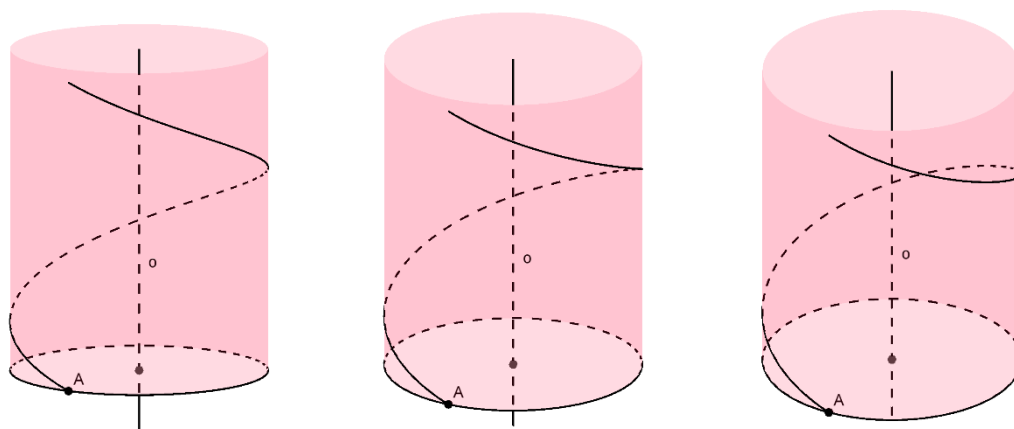
$$\begin{aligned}x(t) &= 3 \cos t + 3t \sin t \\y(t) &= 3 \sin t - 3t \cos t \\z(t) &= 0, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

což jsou rovnice prosté evolventy v rovině $\pi(x, y)$.



Obr. 22

Jako zkrácená, prostá nebo prodloužená cykloida se může zobrazit šroubovice bodu A (obr. 23)



Obr. 23

Když jste se nyní blíže seznámili s cyklickými křivkami, doufám, že při pozorném sledování svého okolí zjistíte, že nás obklopují víc, než jste si mysleli (viz fotografie).



Most pro pěší Arganzuela
Parque de la Arganzuela, Madrid
Dominique Perrault Architecture, 2010
(foto: Dana Kolářová)