ZOBRAZENÍ KRUŽNICE V LINEÁRNÍ PERSPEKTIVĚ

V této kapitole elektronických skript se budeme zabývat *různými typy obrazů kružnice v lineární perspektivě* a *konstrukcemi nejčastěji užívanými pro sestrojení perspektivních obrazů kružnice*.

Názvosloví a značení týkající se lineární perspektivy budeme používat ve standardní podobě – viz například kapitola el. skript *Volba lineární perspektivy*.

Velmi často budeme zobrazovat pouze část kružnice, ale pro zestručnění a zpřehlednění textu nebudeme vždy pečlivě rozlišovat zda právě pracujeme s celou kružnicí nebo pouze s její částí. Tedy *obrazem kružnice* může být v tom kterém případě myšlen i obraz pouze části kružnice, tj. kružnicového oblouku.

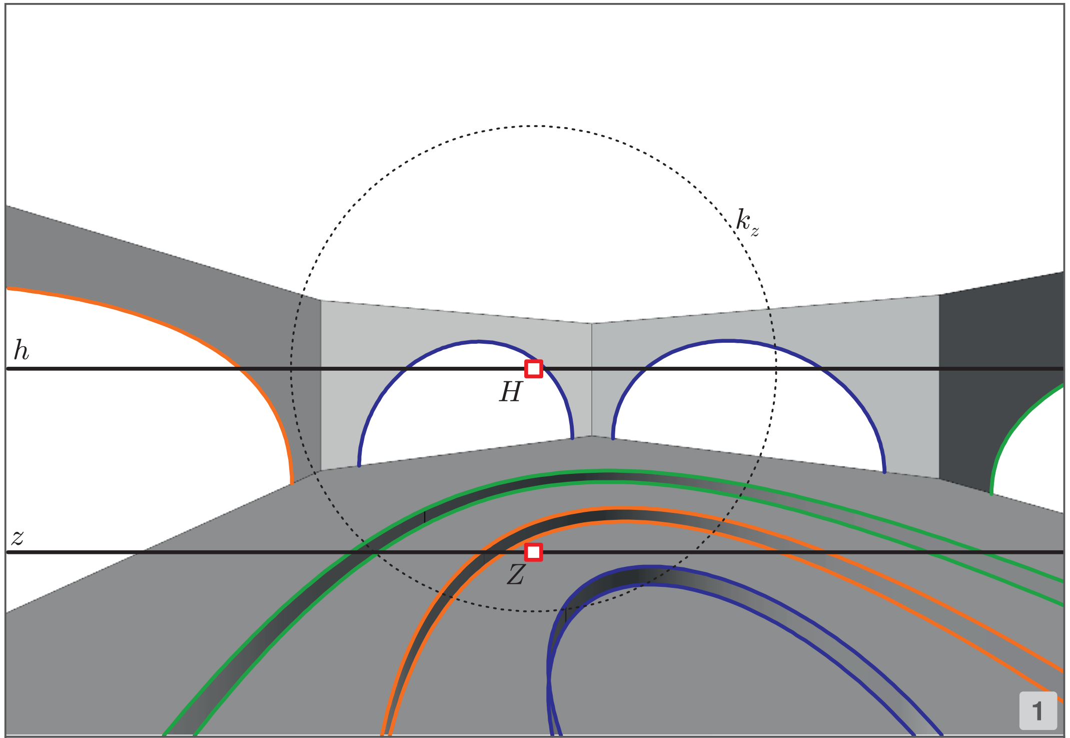
Při konstrukci průmětů v lineární perspektivě budeme většinou pracovat s promítacím paprsky jako s polopřímkami vycházejícími ze středu lineární perspektivy. Pokud bychom uvažovali celé přímky, mohli bychom dostávat průměty objektů, které jsou vzhledem k průmětně „za pozorovatelem“ – to sice může být zajímavé z geometrického hlediska, ale prakticky se s takovou situací nesetkáme.

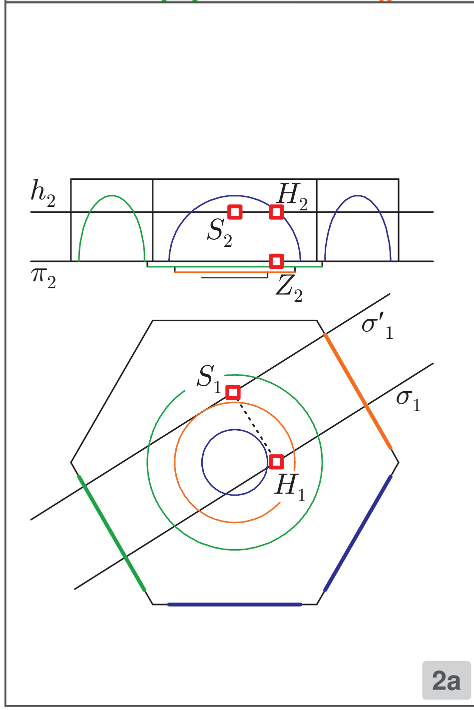
Co může být obrazem kružnice v lineární perspektivě

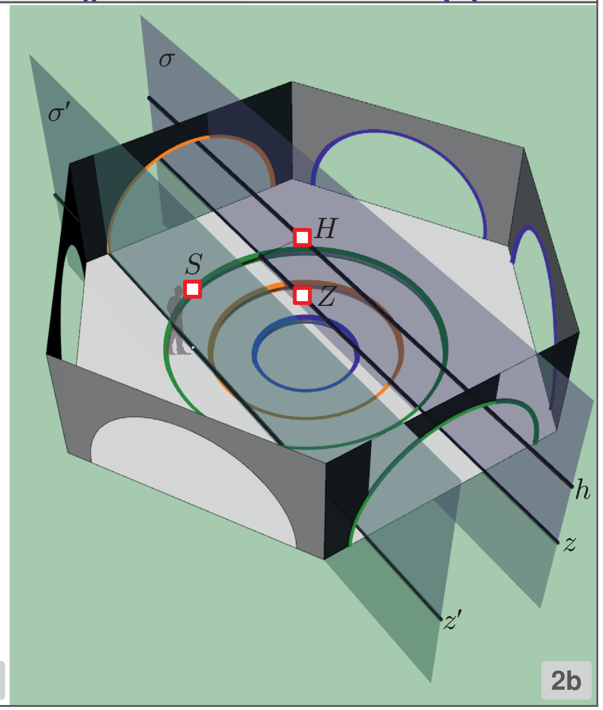
Nejčastěji si pod pojmem *obraz kružnice v lineární perspektivě* vybavíme elipsu. Je však nutno si uvědomit, že obrazem kružnice může být jednak kterákoliv regulární kuželosečka a dále také přímka nebo její část. Je poměrně snadné nahlédnout, že perspektivní průmět kružnice je vlastně řez promítací kuželové plochy perspektivní průměrnou (viz např. obrázky **5–8**). Řezem kuželové plochy může být kterákoliv regulární kuželosečka. Singulární kuželosečky tímto řezem vzniknout nemohou, protože rovina řezu (tj. perspektivní průmětna) neprochází vrcholem kuželové plochy (tj. středem LP). Kuželová plocha může v některých případech zdegenerovat do roviny nebo její výseče (obr. **9–11**).

O typu perspektivního obrazu kružnice rozhoduje její poloha vůči průmětně a vůči středu LP. Při základním členění budeme rozlišovat zda střed LP leží nebo neleží v rovině kružnice. V prvním případě bude obrazem kružnice přímka nebo část přímky, která je průsečnicí roviny kružnice s perspektivní průmětnou. V druhém případě se bude jednat o některou regulární kuželosečku.

Na obrázku **1** je perspektivní průmět objektu s řadou kružnic (ze zobrazené zorné kružnice k_z je zřejmé, že se jedná o „hodně širokoúhlou“ perspektivu). Na tomto obrázku jsou barevně rozlišeny jednotlivé typy kuželoseček, které jsou obrazem kružnic. Modře jsou vyznačeny elipsy, oranžovou barvou jsou paraboly a zeleně hyperboly. Na obrázku **2** je potom stejný objekt znázorněn v pravoúhlých průmětech a v prostorovém nadhledu – a to včetně volby LP.







Na obrázku 3a je znázorněna prostorová situace a na obrázku 3b potom perspektivní průmět z této situace vycházející. Válcová deska stolu má svojí horní podstavu v rovině, která je rovnoběžná se základní rovinu π a leží ve stejné výšce jako střed promítání S (tzv. obzorová rovina).

Promítací kužel fialové vyznačené kružnice se potom zdeformuje do pouhé části roviny ohraničené dvěma polopřímkami – úhlové výseče (viz např. obrázek 9). Průnik této výseče s průmětnou σ je úsečka. V situaci zobrazené na obrázku 3 je to úsečka která leží na horizontu h.

Na obrázku 4a je znázorněn půdorys a na obrázku 4b prostorový náhled objektu s řadou kružnicových oblouků a dále volba LP.

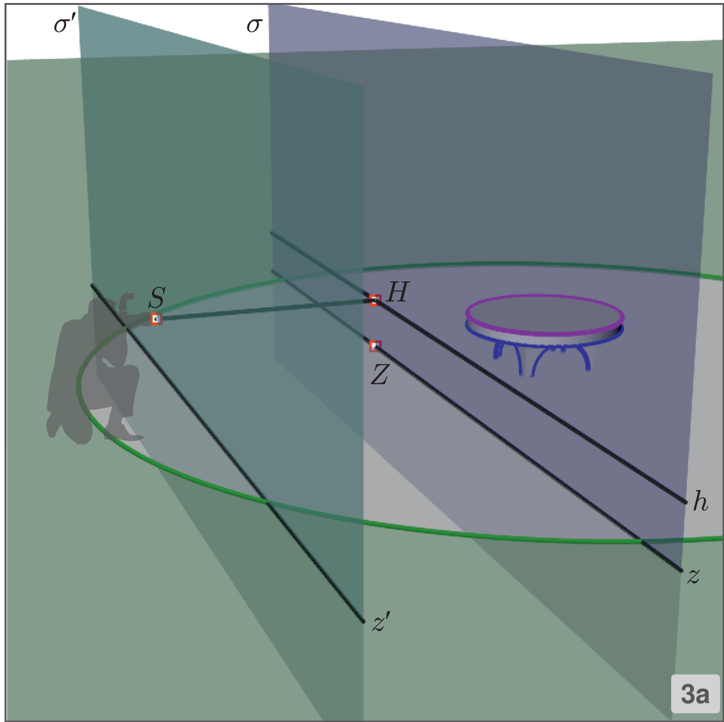
Fialově vyznačené části kružnic leží v rovinách které obsahují střed promítání S. Buď je to rovina obzorová nebo roviny svislé, jejichž půdorysné stopy (průsečnice s π) procházejí bodem S_1.

V perspektivním průmětu na obrázku 4c jsou fialově vyznačeny úsečky či případně polopřímky které jsou průměty uvažovaných kružnic. Zeleně jsou vyznačeny hyperbolické průměty ostatních kružnic na objektu.

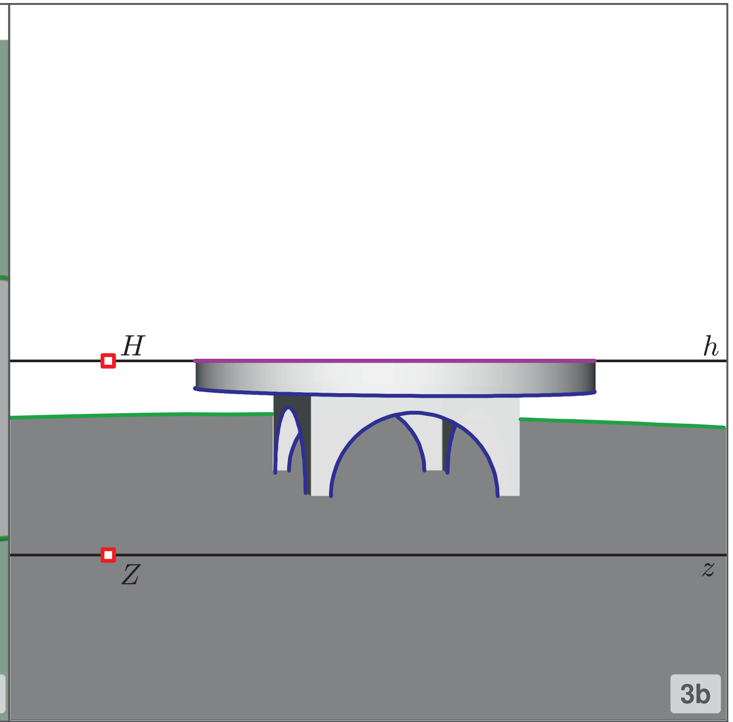
Na obr. 2–4 je vyznačena poloha roviny σ', která prochází středem lineární perspektivy S a je rovnoběžná s perspektivní průmětnou σ, její průsečnice se základní rovinou π je označena z'.

Promítací paprsek každého bodu, který leží v rovině σ' (tedy spojnice bodu S s daným bodem) je rovnoběžný s perspektivní průmětnou. To znamená že nemá s průmětnou σ reálný průsečík. Za perspektivní průměty takových bodů považujeme nevlastní body jejich promítacích přímek (viz body Q^{∞} na obrázcích 7, 8, 10 a 12).

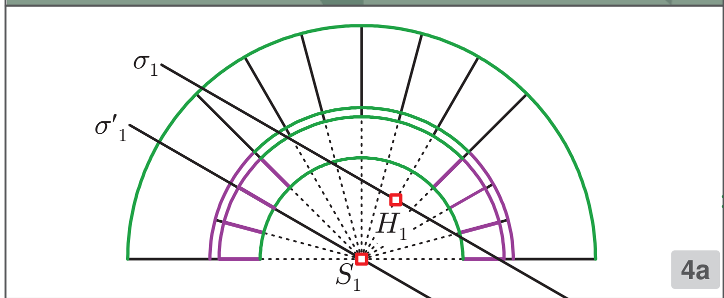
A právě počet nevlastních bodů průmětu kružnice je rozhodující pro typ regulární kuželosečky, která je obrazem kružnice v LP.



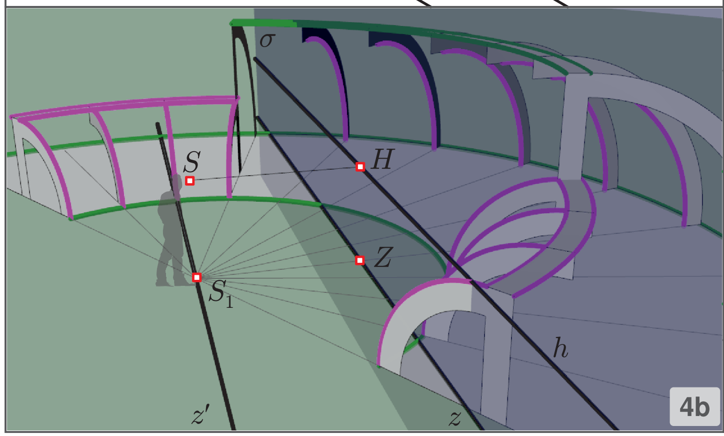
3a



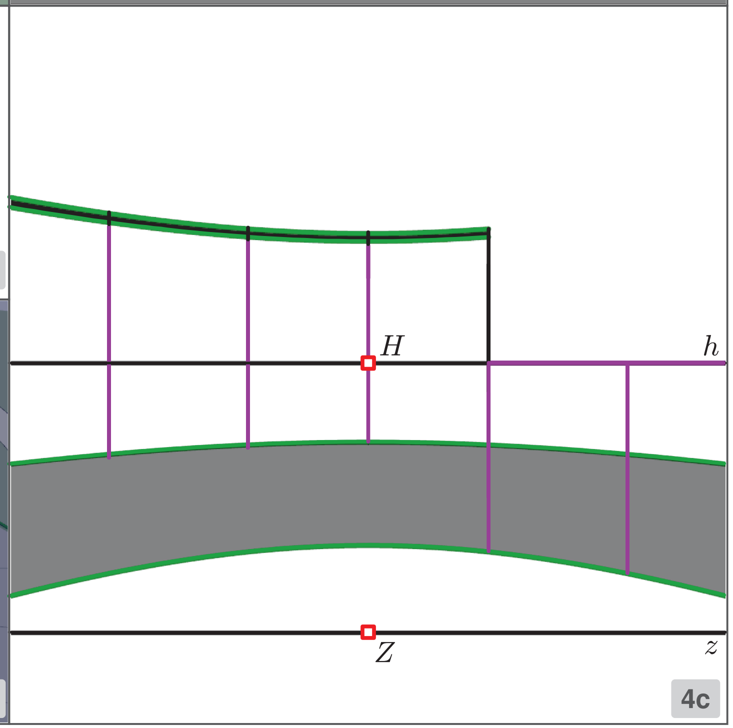
3b



4a



4b



4c

Je třeba připomenout, že v předmětech *DG I* a *DG II* se setkáme nejčastěji s eliptickým, kružnicovým nebo úsečkovým průmětem kružnice. Na této stránce však uvedeme podrobnější přehled. Obdobný (jen mírně upravený) přehled bychom mohli sestavit i pro perspektivní obrazy elipsy.
Věnujme se nejprve situaci, kdy je obrazem kružnice regulární kuželosečka – tedy buď kružnice, elipsa, parabola, nebo hyperbola. Předpokládejme tedy, že *střed lineární perspektivy neleží v rovině zobrazované kružnice.*

Regulární obraz kružnice v lineární perspektivě

Jak bylo řečeno výše, je pro určení typu kuželosečky, která bude obrazem té které kružnice, velmi důležitá rovina σ', jejíž body se v LP promítnou do nevlastních bodů. Podle toho kolik má zobrazovaná kružnice bodů v rovině σ' můžeme snadno rozlišit typ jejího perspektivního obrazu.

- V případě, že kružnice leží v rovině rovnoběžné s průmětnou σ, je jejím perspektivním obrazem opět kružnice – viz obrázek **5** . (Předpokládáme, že kružnice neleží v rovině σ', protože pak by žádný reálný perspektivní obraz kružnice nevznikl.)
- V případě, že kružnice leží v rovině různoběžné s průmětnou σ, ale vůbec neprotíná rovinu σ', bude jejím obrazem elipsa – viz obrázek **6**.
  Protože žádný bod zobrazované kružnice neleží v rovině σ', nemá její perspektivní průmět žádný nevlastní bod. Regulární kuželosečkou bez nevlastních bodů je právě elipsa (nebo ve speciálním výše popsaném případě kružnice).
  Toto je nejčastější případ, se kterým se potkáme – zobrazované kružnice většinou celé leží za průmětnou σ, a proto nemohou rovinu σ' vůbec protínat.
- V případě, že se kružnice roviny σ' dotýká (tedy má s ní společný právě jeden bod), je perspektivním obrazem této kružnice parabola – viz obrázek **7**.
  Průmět zobrazované kružnice má právě jeden nevlastní bod (na obrázku **7** je označen Q^{∞}) a regulární kuželosečka s právě jedním nevlastním bodem je parabola. Osa paraboly v σ na obr. **7** je rovnoběžná s přímkou SQ.
- V případě, že zobrazovaná kružnice protíná rovinu σ' ve dvou bodech, bude jejím perspektivním obrazem hyperbola – viz obrázek **8**.
  Průmět zobrazované kružnice má dva nevlastní body (na obrázku **8** jsou označeny Q^{∞} a Q'^{∞}) a regulární kuželosečka s dvěma nevlastními body je hyperbola. Asymptoty hyperboly v průmětně σ na obr. **8** jsou rovnoběžné s přímkami SQ a SQ'.
  Je nutno dále zdůraznit, že uvažujeme-li promítací polopřímky a tedy pouze část kružnice ležící „před pozorovatelem“, získáme průmětem pouze jednu větev hyperboly. Pokud bychom uvažovali celé promítací přímky a tedy i část kružnice „za pozorovatelem“ jako na obrázku **12**, získali bychom obě větve hyperboly.

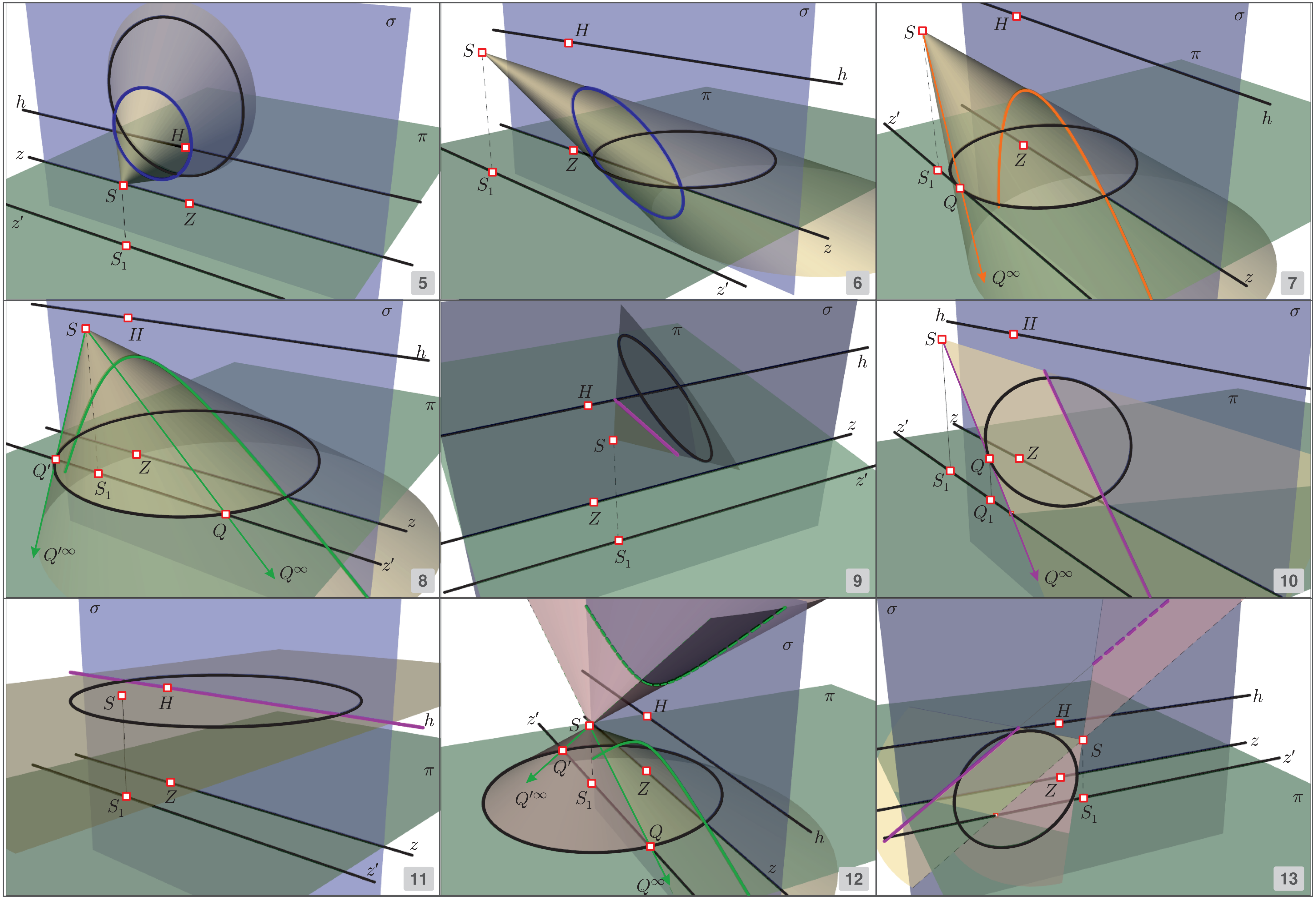
Singulární obraz kružnice v lineární perspektivě

Pojmem *singulární obraz* budeme rozumět situaci, kdy *střed lineární perspektivy leží v rovině zobrazované kružnice.* V takovém případě je obrazem kružnice přímka nebo její část.
Pro rozlišení jednotlivých možností bude opět důležitá poloha zobrazované kružnice vůči rovině σ' a vůči středu promítání S.
V následujícím přehledu jsou uvedeny i situace, se kterými se běžně nesetkáme a některé jsou spíše teoretické a uvedeny jsou pro úplnost. Naopak nejčastějším případem je jistě situace první.

- V případě, že kružnice rovinu σ' vůbec neprotíná a leží celá před pozorovatelem, je obrazem této kružnice v lineární perspektivě úsečka, která leží na průsečnici roviny kružnice a průmětny σ – viz např. obrázky **9** a **3b**.
- V případě, že má zobrazovaná kružnice s rovinou σ' společný právě jeden bod, je perspektivním průmětem této kružnice polopřímka – viz obrázek **10**.
  Výjimkou by byla situace, kdy by se zobrazovaná kružnice dotýkala roviny σ' právě v bodě S – potom by obrazem kružnice byla celá přímka (průsečnice roviny kružnice a průmětny σ).
- Pokud je střed promítání S vnitřním bodem zobrazované kružnice (a tedy tato kružnice protíná rovinu σ' ve dvou bodech), je perspektivním průmětem kružnice celá přímka (průsečnice roviny kružnice a průmětny σ). Na obrázku **11** je znázorněna situace, kdy zobrazovaná kružnice leží v obzorové rovině.
- V případě, že zobrazovaná kružnice protíná rovinu σ' ve dvou bodech a střed promítání S je jedním z nich, je průmětem kružnice polopřímka (průnik průmětny σ a poloroviny určené tečnou kružnice v bodě S, ve které leží promítaná kružnice).

Ve všech výše uvedených případech můžeme předpokládat že pracujeme s promítacím paprsky (tedy polopřímkami vycházejícími z bodu S). Pokud bychom připustili že můžeme pracovat s promítacím přímkami a tedy zobrazovat i části kružnice které leží „za pozorovatelem“, mohla by nastat ještě jedna situace.

- V případě, že zobrazovaná kružnice protíná rovinu σ' ve dvou bodech a střed LP je vnějším bodem této kružnice, je perspektivním obrazem kružnice dvojice polopřímek které leží na jedné přímce (průsečnici roviny kružnice a průmětny σ) – viz například obrázek **13**. Krajní body těchto polopřímek jsou průsečíky tečen ke kružnici z bodu S s průmětnou σ.
  Pokud bychom i v tomto případě uvažovali pouze promítací polopřímky, byla by perspektivním obrazem kružnice pouze jedna z výše zmíněných polopřímek.


σ
h
H
z
S
Z
z′
S_1
5
S
H
h
π
Z
S_1
z
z′
6
S
H
π
h
z′
S_1
Z
Q
Q^∞
z
7
S
H
σ
h
π
Q′
S_1
Z
Q
z
z′
Q'^∞
Q^∞
8
σ
π
h
H
S
z
z′
Z
S_1
9
h
H
σ
S
π
z′
z
Q
Z
S_1
Q_1
Q^∞
10
σ
S
H
h
π
S_1
Z
z
z′
11
σ
H
π
z′
S
Q′
Q'^∞
S_1
Z
Q
h
z
Q^∞
12
σ
h
H
z
S
z′
Z
π
S_1
13

Nejčastěji užívané konstrukce

V této části popíšeme konstrukce které užíváme nejčastěji pro sestrojení perspektivních obrazů kružnice. Jak už bylo řečeno výše, nejčastěji se setkáme s eliptickým obrazem kružnice v LP. Proto se zaměříme právě na konstrukci eliptického obrazu kružnice.

V předmětech *DG I* a *DG II* konstruujeme eliptické obrazy kružnice v LP *bodově* – tedy nekonstruujeme osy a vrcholy elipsy, ale snažíme se sestrojit dostatečné množství bodů výsledné křivky a ty pak spojujeme křivítkem.

Konstrukcí, kterou lze využít v největším počtu typických zadání je *konstrukce příčková*, případně z ní odvozená *konstrukce Thibaultova*.

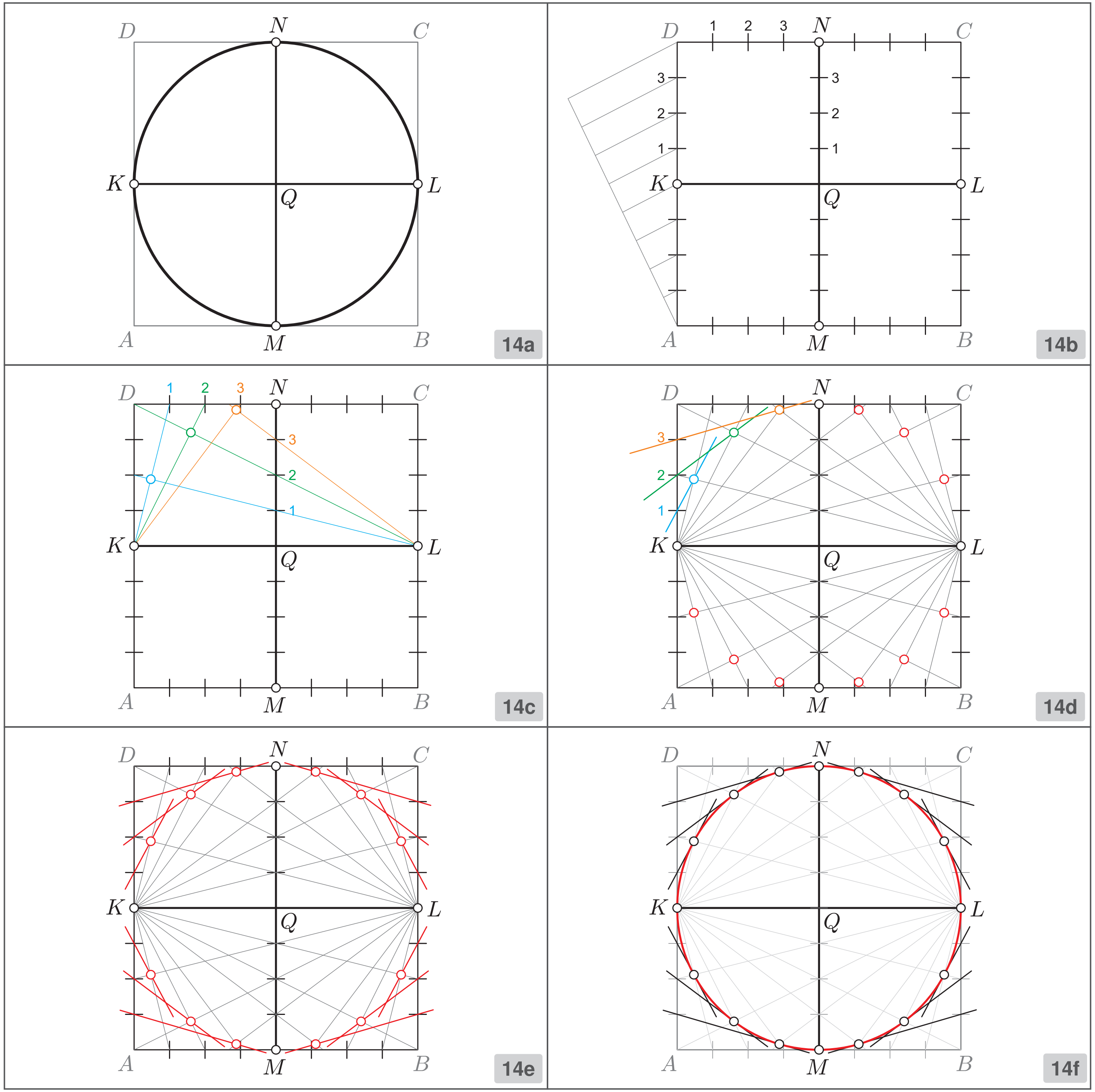
Příčková konstrukce

Příčkovou konstrukci předvedeme nejprve pro kružnici bez perspektivního zkreslení. Vstupem pro tuto konstrukci je dvojice kolmých průměrů KL, MN a kružnici opsaný čtverec $ABCD$ tvořený tečnami kružnice v bodech K, L, M, N. Tuto konstrukci můžeme použít i pro elipsu pokud jsou KL, MN sdružené průměry elipsy a $ABCD$ je opsaný rovnoběžník.

Konstrukci si můžete vyzkoušet i v GeoGebra appletu: https://ggbm.at/f2QE5gKU.

Příčková konstrukce probíhá po kvadrantech. Nejprve je nutné zvolit kolik bodů kružnice v každém kvadrantu opsaného čtverce chceme sestrojit. V konstrukci na obrázku 14 budeme sestrojovat v každém kvadrantu čtverce $ABCD$ tři body kružnice. Proto je nutné strany opsaného čtverce a průměr MN rozdělit na 8 stejných dílků (14b).

Body kružnice pak získáme jako průsečíky *příček*, tedy spojnic koncových bodů jednoho z průměrů, s dělícími body – jak je pro kvadrant $KQND$ znázorněno na obr. 14c.



14a 14b 14c 14d 14e 14f

Na obr. 14d je znázorněno symetrické přenesení konstrukce do ostatních kvadrantů.

Kromě toho je v kvadrantu $KQND$ zobrazena doplňková konstrukce tečen kružnice v již dříve sestrojených bodech. Tečna kružnice v sestrojeném bodě je spojnice tohoto bodu s odpovídajícím dělícím bodem na straně opsaného čtverce.

Obrázek 14e zobrazuje všech 12 nově sestrojených bodů a tečen kružnice. Spolu se zadanými body K, L, M, N máme 16 bodů a tečen kružnice.

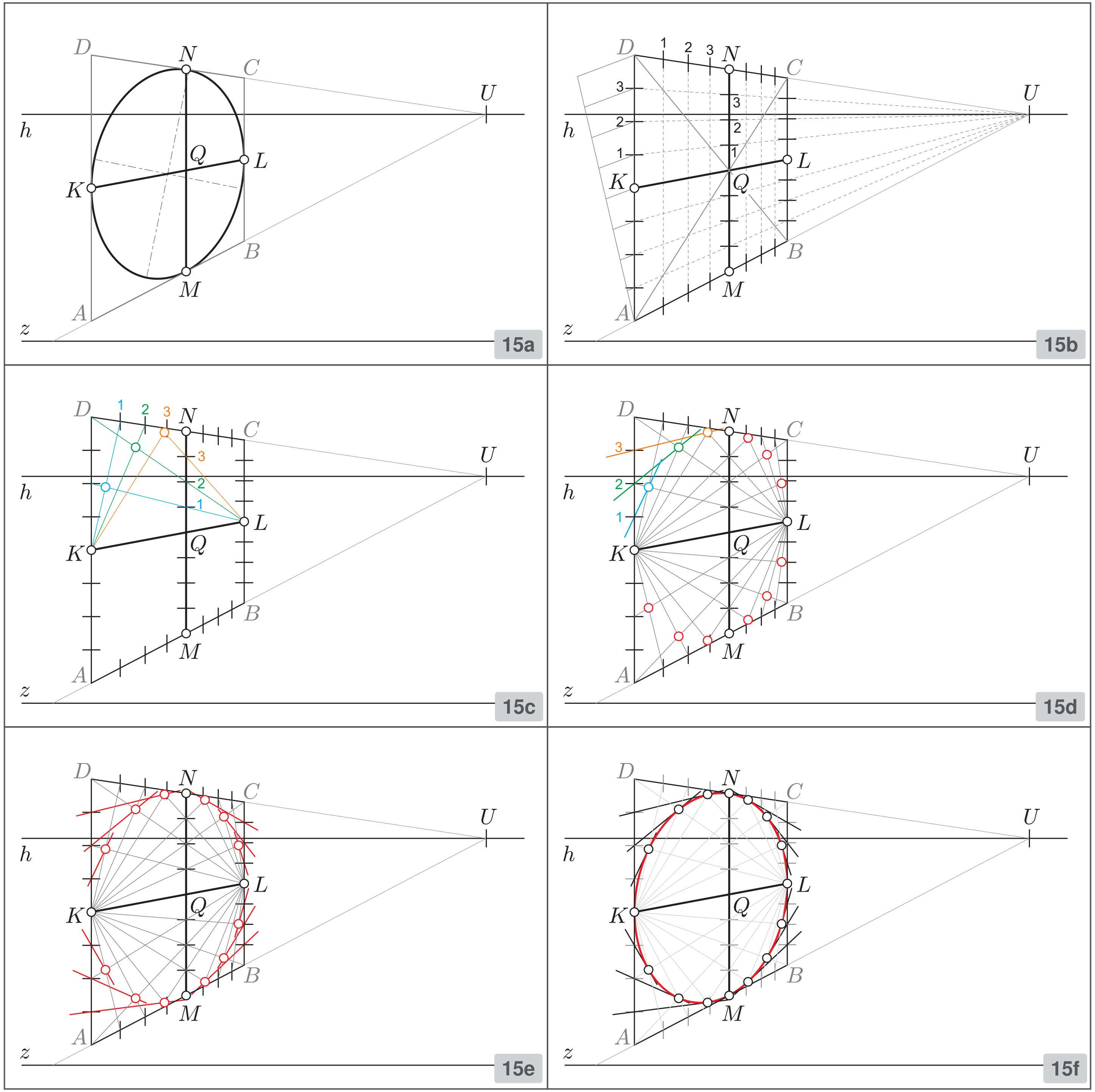
Typickým využitím příčkové konstrukce pro zobrazení kružnice v LP je situace, kdy zobrazovaná kružnice leží ve svislé rovině. Nejvhodnější volbou dvojice kolmých průměrů kružnice je jeden rovnoběžný se základní rovinou π a druhý rovnoběžný s průmětnou σ. V zadání na obr. 15 jsou to průměry $KL \| \pi$ a $MN \| \sigma$.

V jednotlivých částech obr. 15 jsou zobrazeny stejné kroky jako u příčkové konstrukce „v rovině“.

Naprosto zásadní je **správné rozdělení úseček**. V LP lze planimetricky rozdělit pouze úsečky, které leží na přímkách rovnoběžných s průmětnou σ. V situaci na obr. 15 jsou to svislé úsečky AD, MN a BC. Na ostatních úsečkách dochází k perspektivnímu zkreslování, a je proto nutné využít pro jejich rozdělení některou z perspektivních konstrukcí. Jedna z možností je znázorněna na obr. 15b. Dále lze využít např. otočeného půdorysu, nebo dělení pouze pomocí úhlopříček v lichoběžníku $ABCD$ nebo jeho částech.

Další postup je pak obdobný jako u „neperspektivní“ konstrukce na obr. 14.

Je zřejmé, že bod Q, který je v prostoru středem zobrazované kružnice, není v perspektivním průmětu středem elipsy. Pro zdůraznění této skutečnosti jsou na obr. 15a zobrazeny i osy elipsy. Tyto osy nejsou výstupem příčkové konstrukce.



Thibaultova konstrukce

Konstrukci znázorněnou na obr. 16 lze přímo odvodit z konstrukce příčkové. Opět je využito rovnoměrného dělení stran opsaného čtverce. Tentokrát však nemůžeme volit počet dělících bodů a tím počet nově zkonstruovaných bodů kružnice. Strany opsaného čtverce dělíme vždy na čtvrtiny (tedy konstruujeme poloviny úseček v každém kvadrantu).

Poté sestrojíme příčky. Nejprve spojíme koncové body zadaných průměrů kružnice s protějšími vrcholy opsaného čtverce – na obr. 16a jsou tyto příčky zobrazeny modře. Dále doplníme příčky, které jsou spojnicemi koncových bodů zadaných průměrů s nejbližšími dělícími body na přilehlých stranách opsaného čtverce – na obr. 16a jsou tyto příčky vyznačeny fialově.

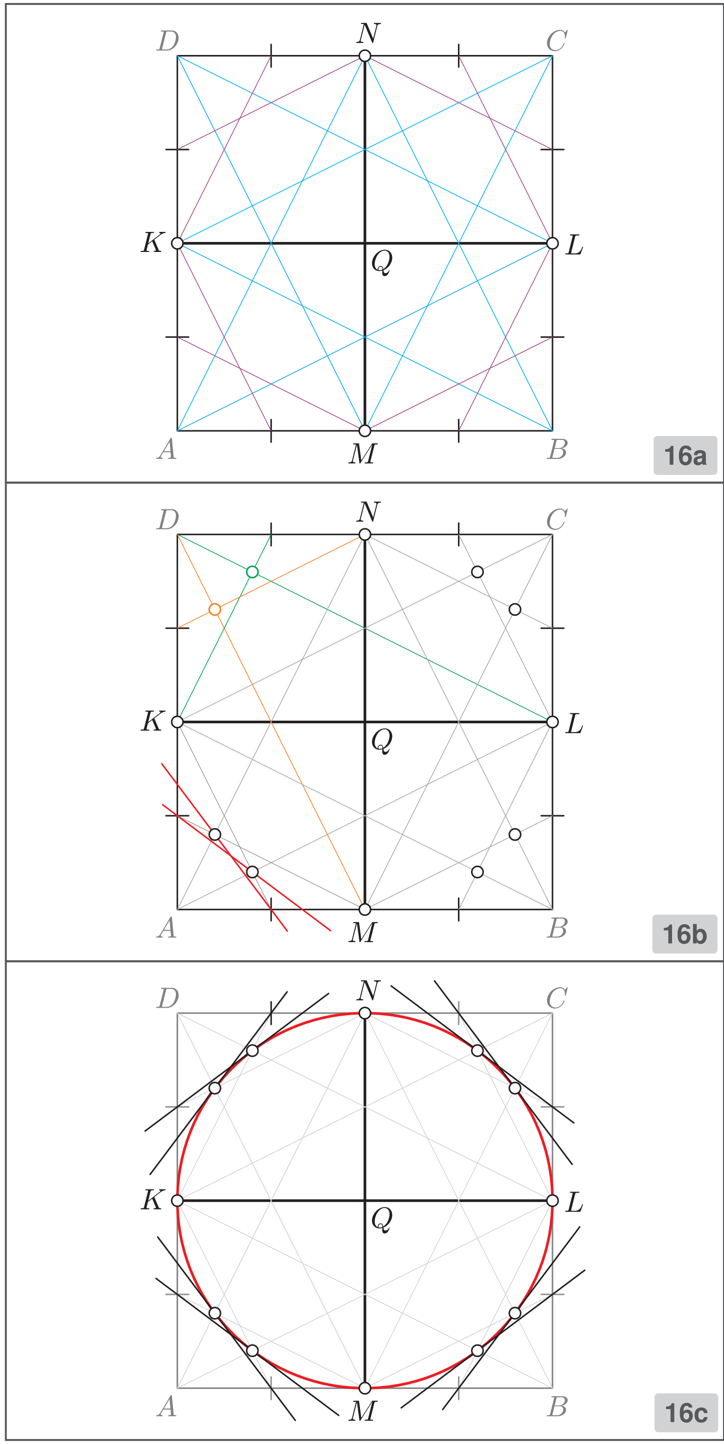
V každém kvadrantu je pak jeden bod kružnice průsečík příček, které vycházejí z bodů K, L a druhý bod kružnice je průsečík příček, které vycházejí z bodů M a N. Barevně jsou tyto dvojice příček pro kvadrant $KQND$ vyznačeny v obrázku 16b.

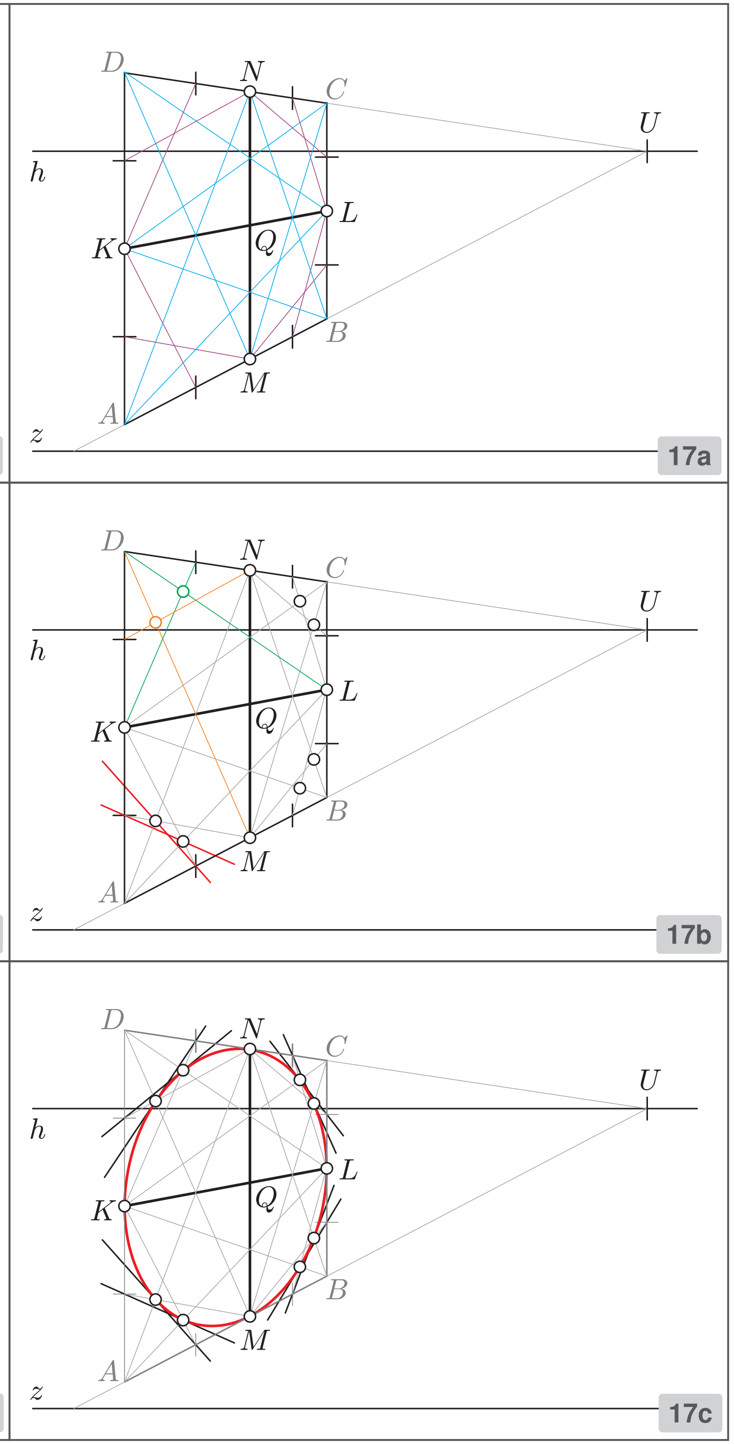
Ve stejném obrázku je znázorněna konstrukce tečen v bodech kružnice sestrojených v kvadrantu $KQMA$. Dělící bod spojíme se s tím zkonstruovaným bodem kružnice ve stejném kvadrantu, který neleží na příčce vycházející ze zvoleného dělícího bodu.

Konstrukci si můžete vyzkoušet i v GeoGebra appletu: https://ggbm.at/RW85GTpR.

Thibaultovu konstrukci lze samozřejmě využít pro elipsu za stejných podmínek jako konstrukci příčkovou (tedy pokud jsou KL a MN sdružené průměry elipsy a $ABCD$ pak opsaný rovnoběžník).

Na obrázku 17 je znázorněno využití Thibaultovy konstrukce pro sestrojení perspektivního obrazu kružnice ve svislé rovině.





Osmibodová konstrukce

Asi nejčastěji v LP zobrazujeme kružnici, která leží v základní rovině π nebo trochu obecněji ve vodorovné rovině. Pro zobrazení takové kružnice lze využít obou konstrukcí popsaných v předchozím textu. Výhodně lze ale využít i *konstrukci osmibodovou*. Pomocí této konstrukce sestrojíme osm rovnoměrně rozmístěných bodů kružnice a tečny v nich. Jak je zřejmé z obr. **18a** zobrazujeme vlastně dva čtverce opsané zadané kružnici, přičemž platí, že body dotyku kružnice s jedním z opsaných čtverců leží na úhlopříčkách druhého opsaného čtverce. Nejvýhodnější je zvolit rozmístění tak, aby jeden ze čtverců byl v průčelné poloze (tj. jeho strany leží na hloubkových přímkách a přímkách rovnoběžných se základnicí).

Do LP převedeme osmibodovou konstrukci z otočeného půdorysu. S výhodou lze využít symetrie celého obrazce, proto je na obrázcích **18c-f** zobrazena vždy jen čtvrtina otočeného půdorysu.

18b Z otočeného půdorysu vyneseme hloubkovou přímku bodů K, 1, Q, 5, M a houbkovou přímku bodů B, 3, C. Sestrojíme body Q a 5.

18c S využitím symetrie sestrojíme hloubkovou přímku bodů A, 7, D. Na rovnoběžkách se základnicí body Q a 5 najdeme body 3, 7, C, D. Na úhlopříčkách CQ, DQ najdeme body A, B a na přímce AB sestrojíme bod 1.

18d Z otočeného půdorysu vyneseme hloubkové přímky bodů 2, 4 a bodu L. Sestrojíme body 2, 4 na úhlopříčkách BD, AC a bod L na přímce 73.

18e Pomocí symetrie sestrojíme hloubkové přímky bodů 6, 8 a bodu N. Body 6, 8 leží na úhlopříčkách BD, AC, bod N leží na přímce 73.

18f Přímky $L2$ a $N8$ se protínají v bodě K, přímky $L4$ a $N6$ se protínají v bodě M. Body K a M leží na hloubkové přímce bodu Q.