Konoidy – přímkové plochy

Konoidy jsou speciální zborcené přímkové plochy. Opět jsou určeny třemi křivkami, v případě konoidů jsou to:

-křivka rovinná (kružnice, elipsa, parabola, …) či prostorová (šroubovice, …)

-vlastní přímka

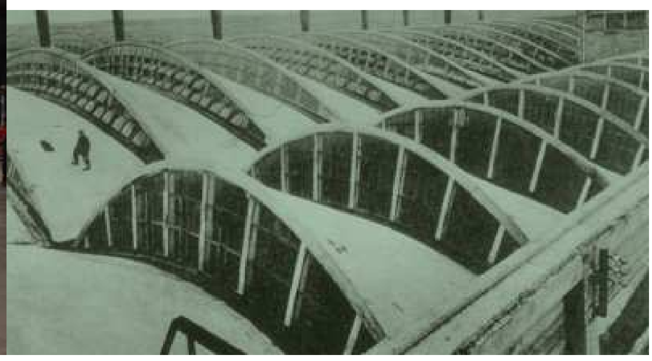
-nevlastní přímka, která je určena rovinou (tzv. řídící rovina).

Je-li vlastní přímka kolmá k řídící rovině, konoid nazýváme přímý, v opačném případě šikmý (kosý).

Užití konoidů v architektuře:

Meyerson Symphony Centre vDallasu, Texas, USA
Konstrukce studentů architektury v Lyonu, Francie

Železniční stanice v Manchesteru, Velká Británie
Továrna na topná tělesa v Dammarie-les-Lys, Francie



1. Zadání:

A4 na výšku
KP: O [7,13], $\omega = 135°$, $q = 1$

Kruhový konoid je určen těmito řídícími útvary:
a) kružnice $k(S, 4)$ v bokorysně $\mu(y,z)$, $S[0,5,4]$,
b) přímka l, $L \in l$, $l \perp \pi$, $L[10,5,0]$,
c) řídící rovina je půdorysna $\pi(x,y)$.
Zobrazte nejméně 18 tvořících přímek plochy.

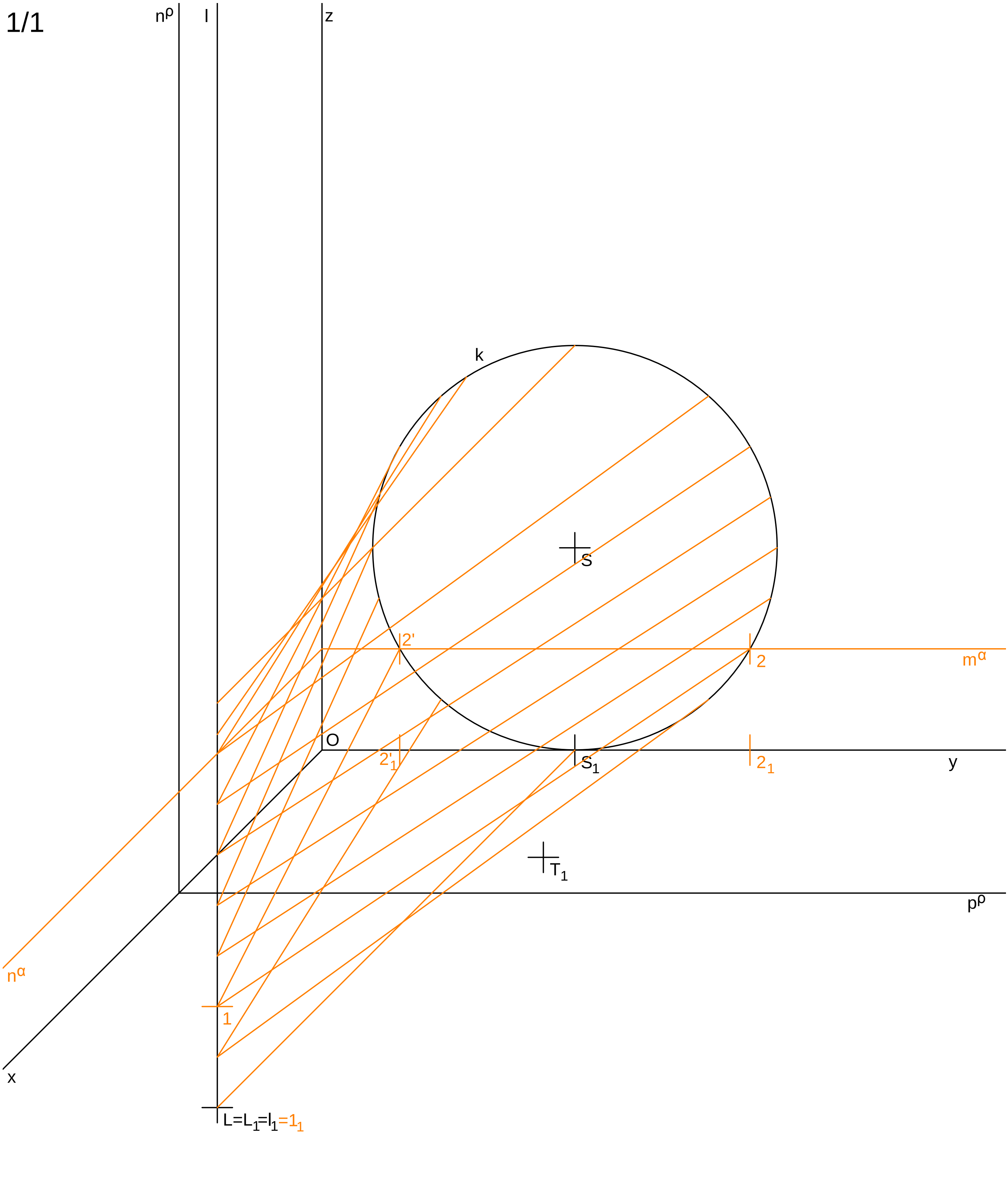
Určete tečnou rovinu plochy v bodě $T[3;6{,}5;?]$, $z_T > z_S$, pomocí dotykového hyperbolického paraboloidu.

Zobrazte řez plochy rovinou $\rho(4,\infty,\infty)$.

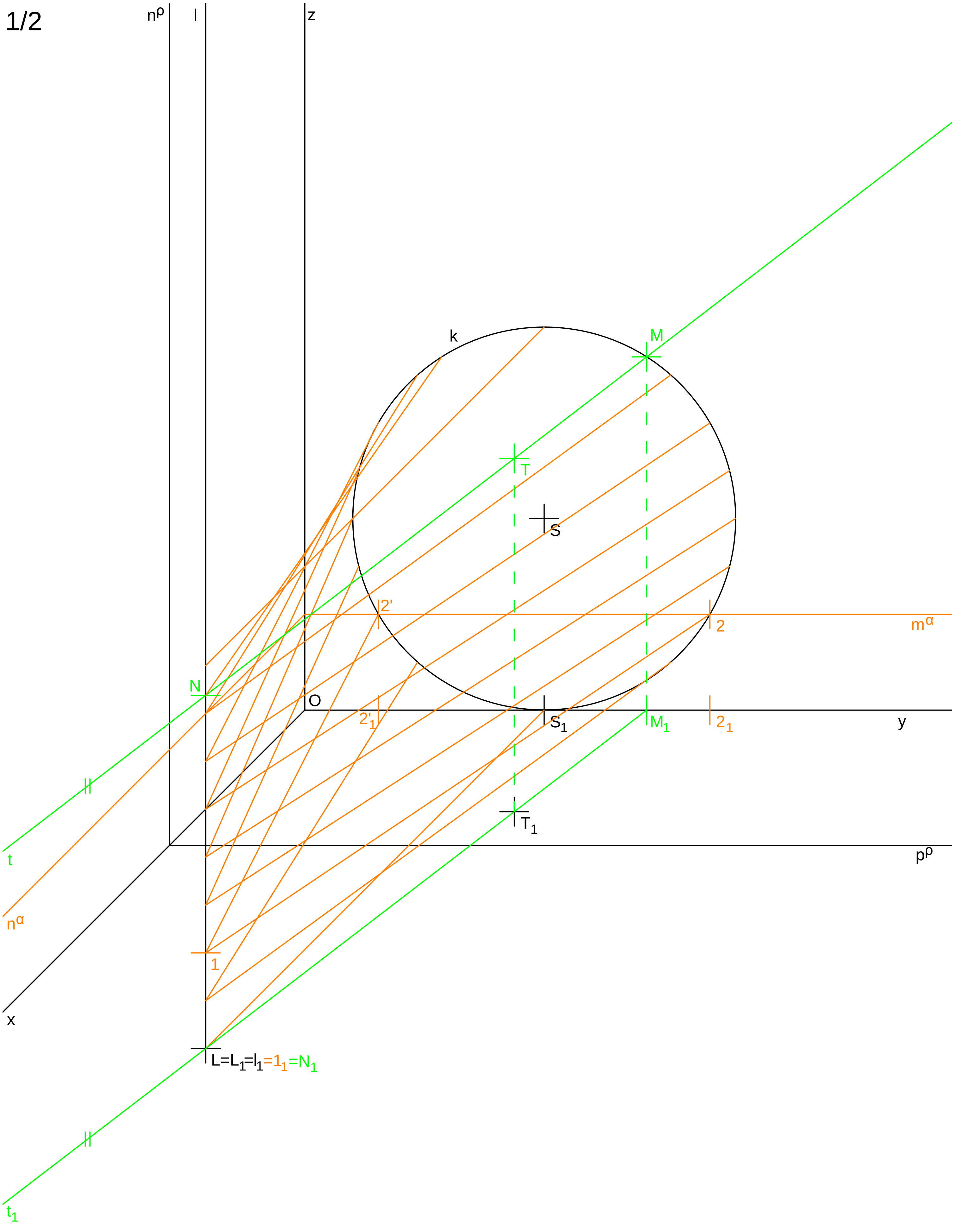
Postup:

1) Tvořící přímky konoidu jsou přímky, které protínají zadanou kružnici k, zadanou přímku l a jsou rovnoběžné s řídící rovinou, zde s půdorysnou.
Zvolíme libovolnou rovinu α rovnoběžnou s půdorysnou, její průsečík s přímkou l označíme 1, průsečíky α s kružnicí k označíme 2 a 2'. Přímky 12 a 12' jsou přímky konoidu.
2)Pro dourčení bodu T použijeme půdorys tvořící přímky t, tj. $t_1 = T_1L_1$. Průsečík t_1 s půdorysem k_1 kružnice označme M_1. Dourčíme bod M na kružnici k tak, aby $z_M > z_S$. Přímka t je rovnoběžná s půdorysnou, tedy $z_T = z_M$. Průsečík t a l označme N.
3)Pro určení tečné roviny v bodě T použijeme dotykový hyperbolický paraboloid. Tento hyp. paraboloid má s konoidem společnou přímku a také společné tečné roviny v každém bodě této přímky.
V našem příkladu je společnou přímkou právě přímka t, chceme dourčit tečnou rovinu konoidu v jejím bodě T.
Zatím umíme určit tečnou rovinu v bodě M, tato tečná rovina je určena přímkou t a tečnou m kružnice k v bodě M. Dále umíme určit tečnou rovinu v bodě N, tato tečná rovina je určena přímkou t a přímkou l. Přímky těchto tečných rovin jsou přímkami pomocného hyperbolického paraboloidu, rozdělme je do dvou regulů:
1.regulus – mimoběžky l a m
2.regulus – přímka t.
Pro druhý regulus nemáme další přímku, ale řídící rovina tohoto regulu je právě řídící rovina konoidu, půdorysna π. Nyní si sestrojíme zborcený čtyřúhelník hyperbolického paraboloidu, tj. sestrojíme druhou přímku 2.regulu. Zvolíme lib. bod G na přímce m (kvůli přesnosti dostatečně vzdálený od bodu M), tímto bodem vedeme rovinu β rovnoběžnou s π a označíme F její průsečík s přímkou l. Čtyřúhelník $MGFN$ je hledaný zborcený čtyřúhelník.
Určíme tečnou rovinu hyperbolického paraboloidu (a zároveň konoidu) v bodě T, tj. v bodě T sestrojíme přímku 1. regulu. Řídící rovina 1. regulu je bokorysna μ. Bodem T vedeme rovinu ψ rovnoběžnou s μ. Označíme U průsečík s přímkou FG.
Tečná rovina v bodě T je určena přímkou t a přímkou $u = UT$.
Pozn: Rovina 1. regulu může být v některých případech obecnější než tomu je v tomto příkladě. Pak je jednodušší rozdělit úsečku FG bodem U tak, aby platilo $|FU| : |UG| = |NT| : |TM|$, tj. bod U rozděluje úsečku FG ve stejném poměru jako bod T úsečku NM.
4)Řez přímkové plochy sestrojíme bodově, hledáme průsečíky přímek plochy s rovinou ρ. Řezem v našem příkladě je elipsa, jistě najdete její osy.

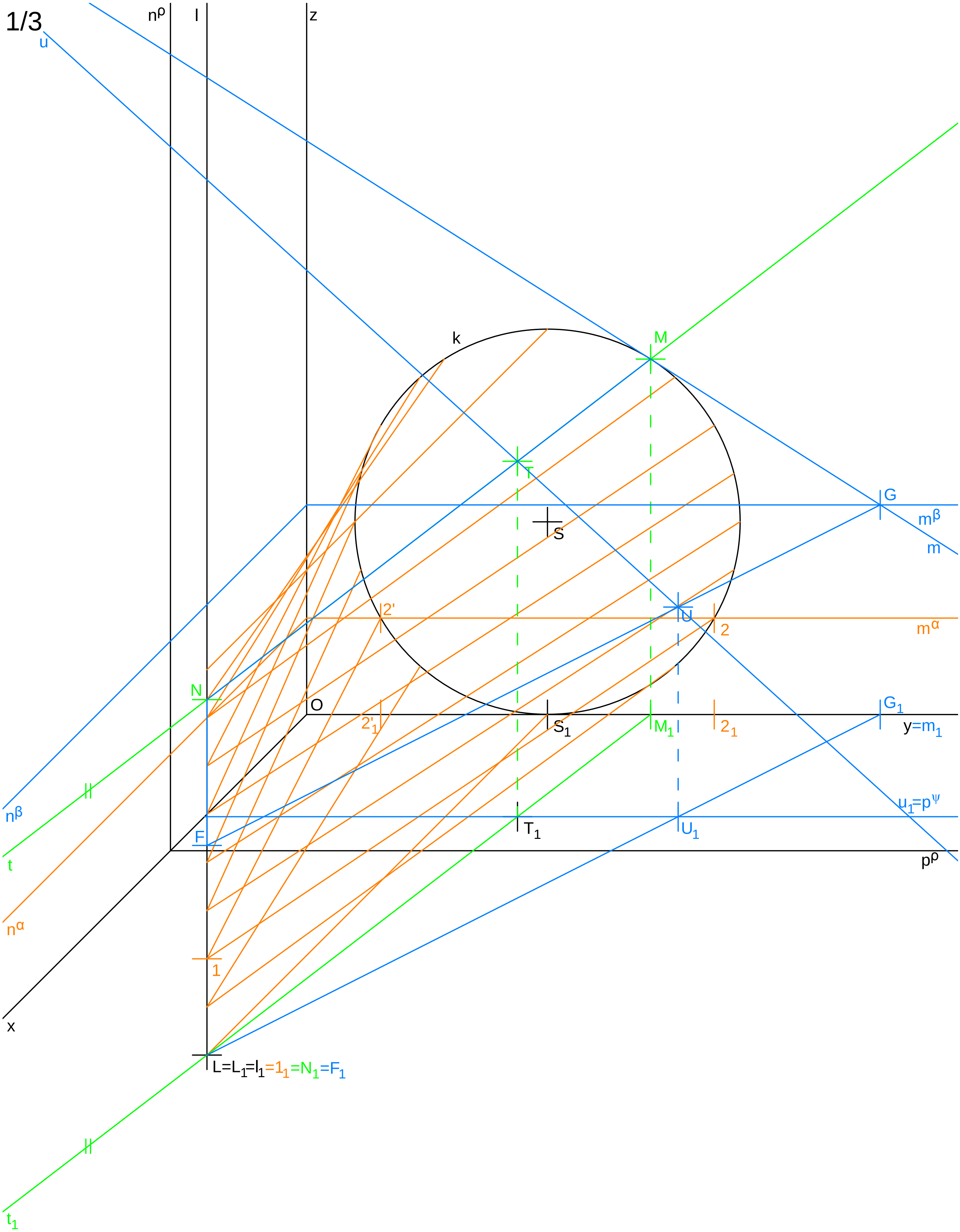
1/1



1/2

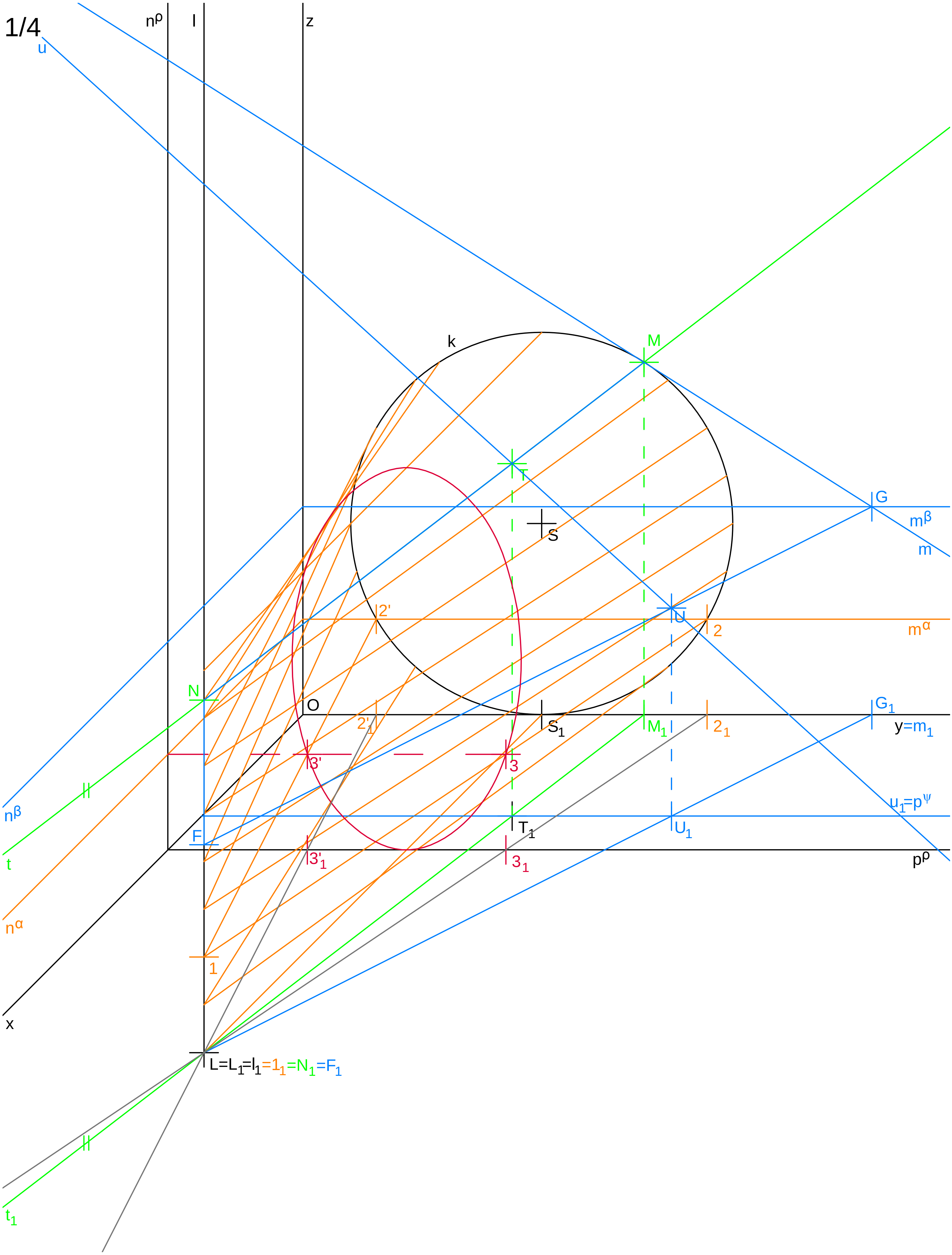


1/3



n^ρ
l
z
u
k
M
T
S
G
m^β
m
2'
U
2
m^α
N
O
$2'_1$
S_1
M_1
2_1
G_1
$y=m_1$
n^β
$u_1=p^\psi$
F
T_1
U_1
t
p^ρ
n^α
1
x
$L=L_1=l_1=1_1=N_1=F_1$
t_1

1/4


nρ
l
z
u
k
M
T
S
G
mβ
m
2'
U
2
mα
N
O
2'1
S1
M1
21
G1
y=m1
3'
3
nβ
u1=pψ
F
T1
U1
3'1
31
pρ
t
nα
1
x
L=L1=l1=11=N1=F1
t1

2. Zadání:

A4 na výšku
PA: ΔXYZ, $X\,[3,5;11]$, $|XY| = |YZ| = 12$, $|XZ| = 10$

Parabolický konoid je určen těmito řídícími útvary:
a) parabola v bokorysně $\mu(y,z)$, bod $V[0,7,10]$je vrchol paraboly, osa paraboly $o \parallel z$, počátek O je bodem paraboly,
b) přímka $l = KL$, $K[12,0,4]$, $L[12,14,4]$,
c) řídící rovina je nárysna $\upsilon(x,z)$.
Zobrazte nejméně 12 přímek plochy (pravidelně rozmístěných).

Určete tečnou rovinu plochy v bodě $T[3;?;6]$, $y_T > y_V$, pomocí dotykového hyperbolického paraboloidu.

Zobrazte řez plochy rovinou ρ:$T \in \rho$, $\rho \parallel \mu(y,z)$.

Postup:

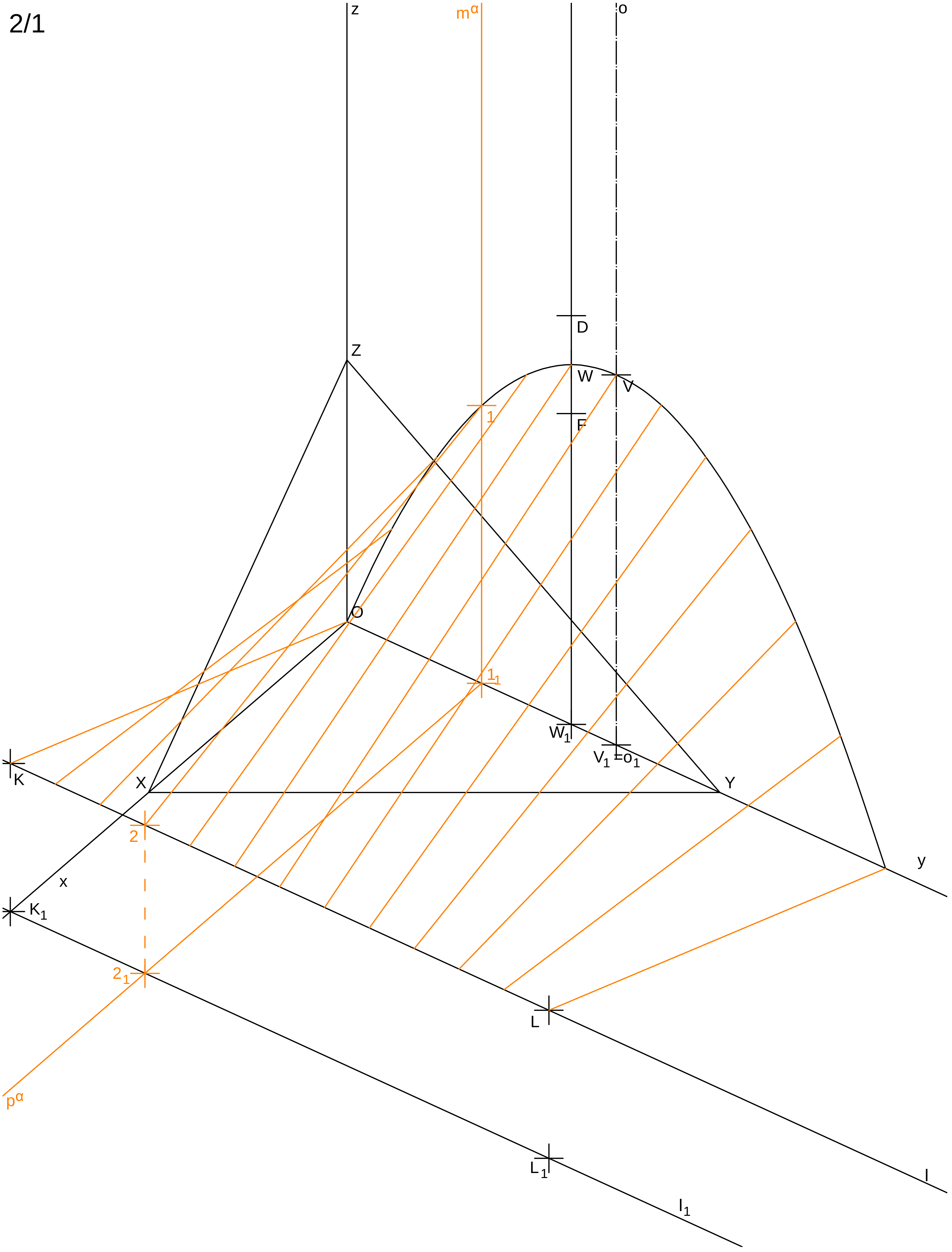
1)Zobrazíme parabolu a přímku l. Pomocí rovin rovnoběžných s řídící rovinou ($\alpha \parallel \upsilon$) sestrojíme obrazy přímek konoidu (12).

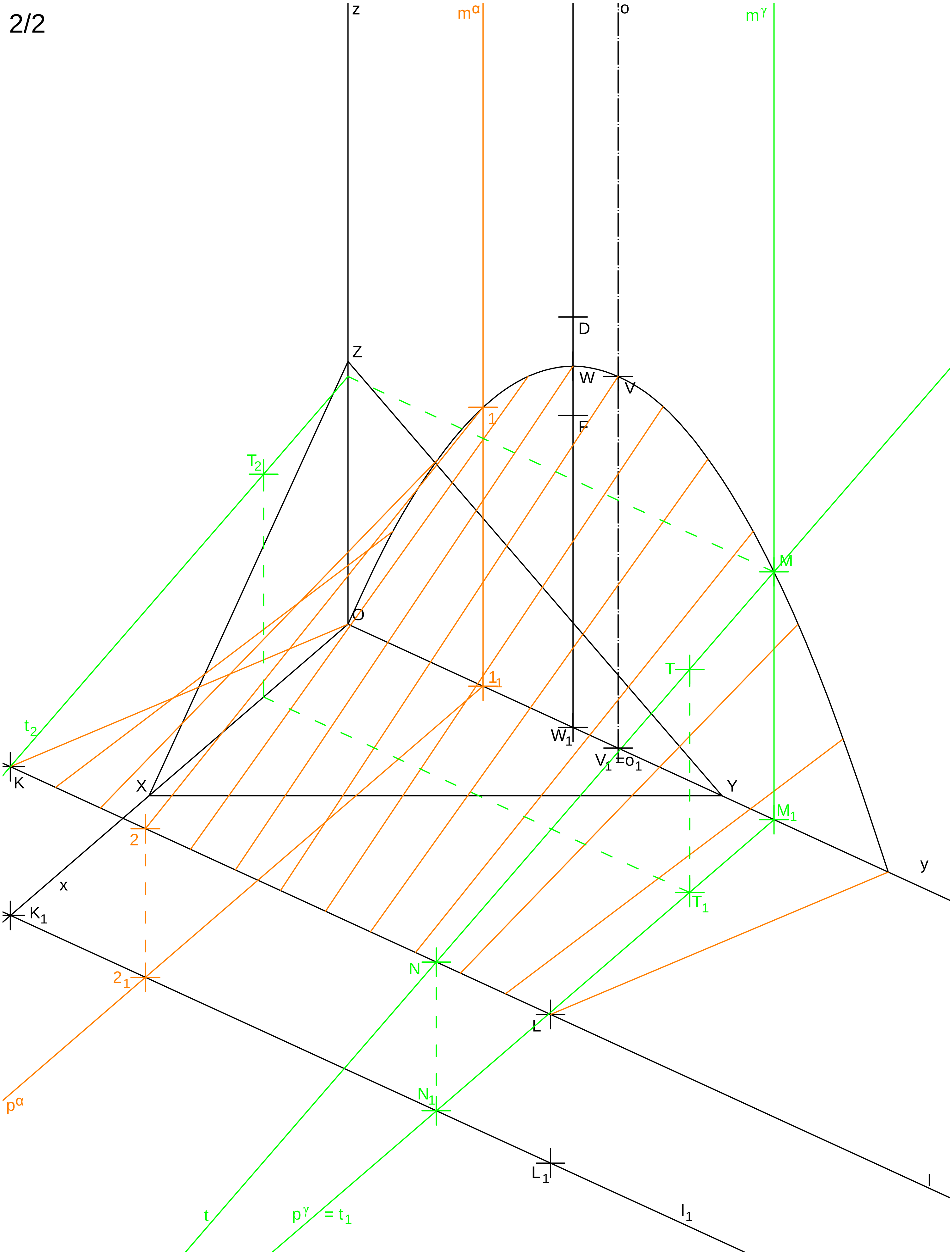
2)Bod T dourčíme s využitím nárysu tvořící přímky $t = MN$.

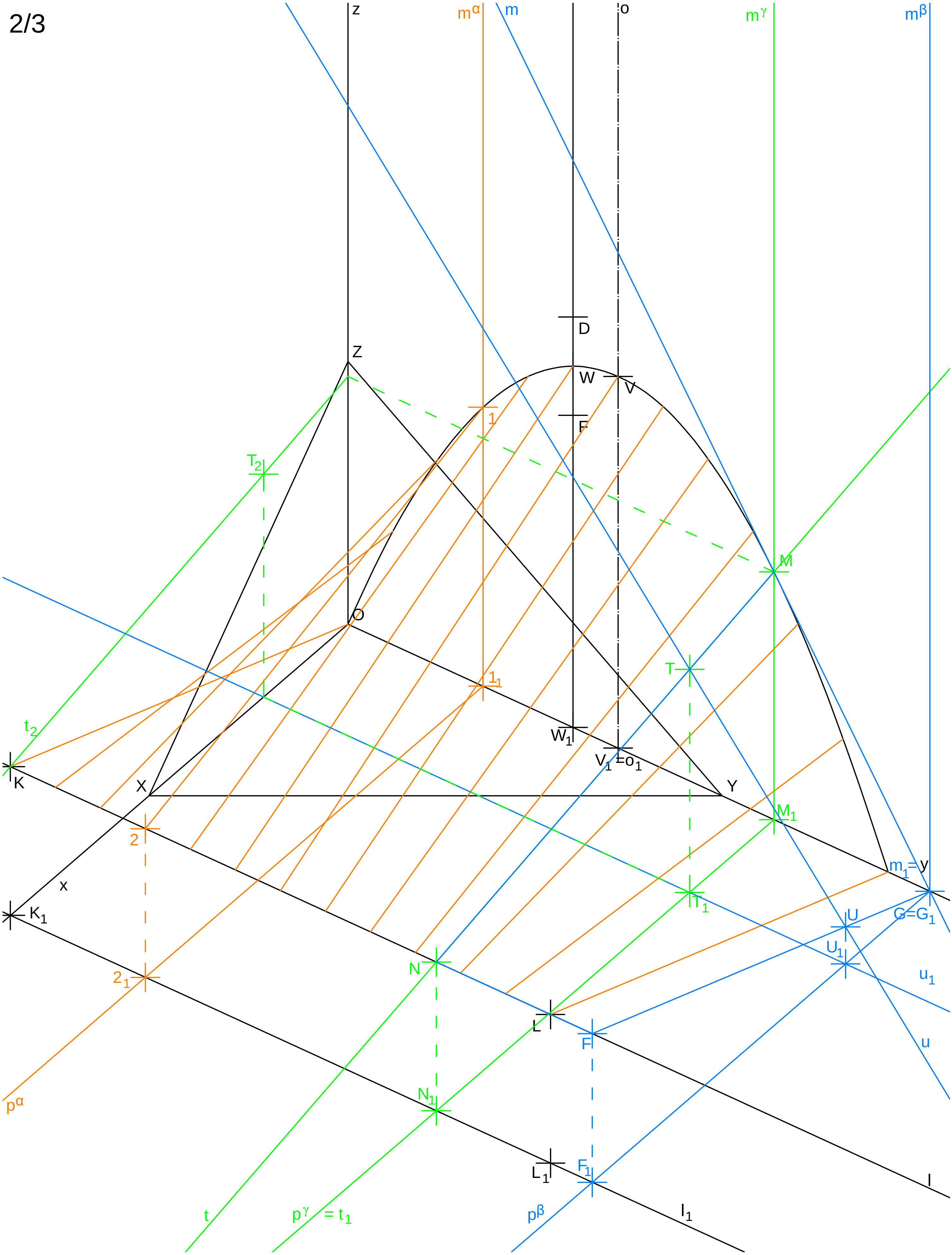
3)Pro tečnou rovinu využijeme dotykový hyperbolický paraboloid.
-tečná rovina v bodě M je určena přímkou t a tečnou m paraboly v bodě M
-tečná rovina v bodě N je určena přímkou t a přímkou l.
Zvolíme bod G na přímce m a dourčíme zborcený čtyřúhelník $MGFN$. Úsečku GF rozdělíme bodem U v tom poměru, ve kterém bod T rozděluje úsečku MN. Tečná rovina v bodě T je určena přímkou t a přímkou $u = TU$

4)Řez rovinou ρ sestrojíme bodově (viz bod R).

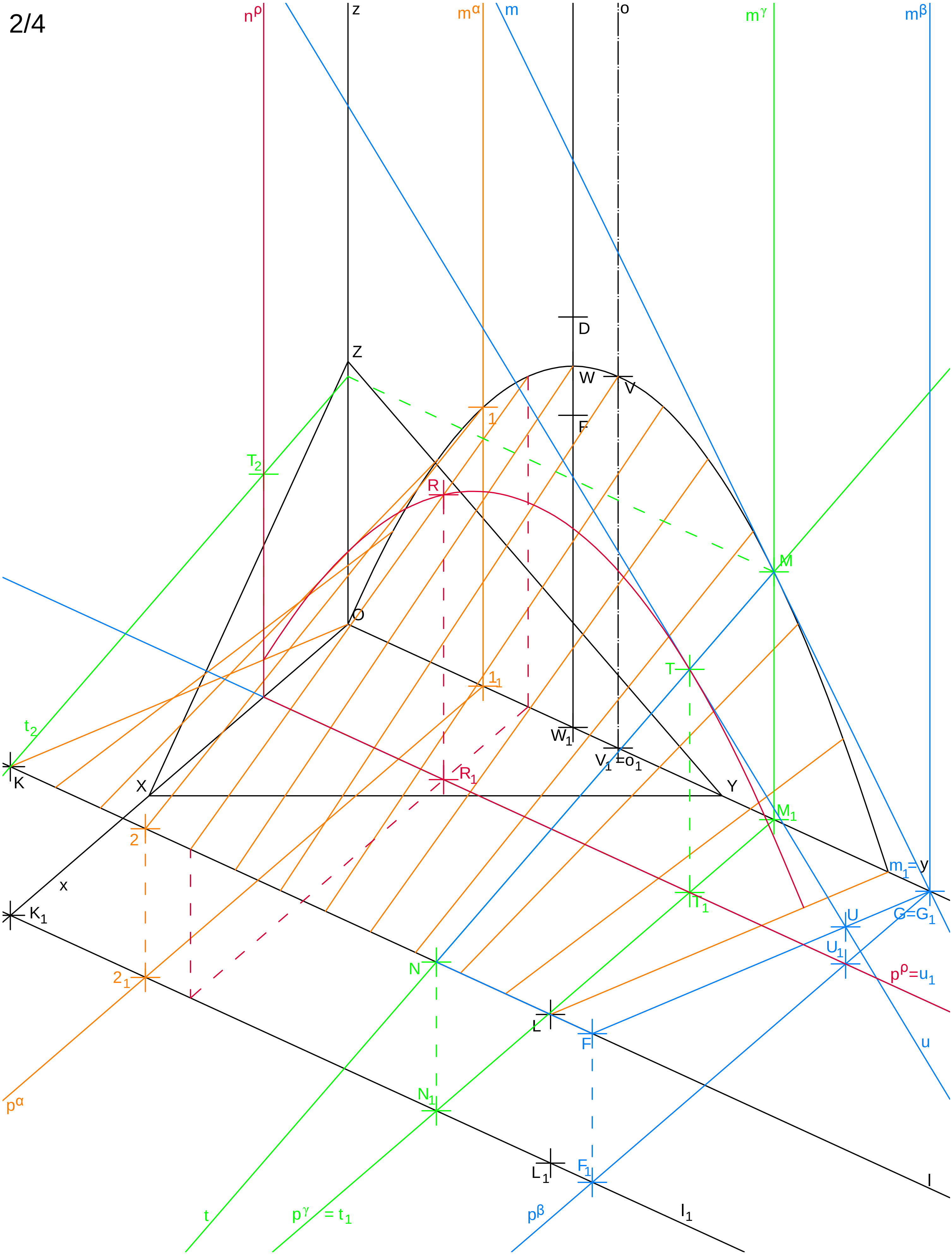
2/1




z
m^{α}
o
m^{γ}
D
Z
W
V
1
F
T_2
M
O
T
1_1
t_2
W_1
$V_1 \equiv o_1$
K
X
Y
M_1
2
y
x
T_1
K_1
N
2_1
L
p^{α}
N_1
L_1
l
l_1
t
$p^{\gamma} = t_1$


z
mα
m
o
mγ
mβ
D
Z
W
V
E
T2
1
O
M
T
11
t2
K
X
W1
V1=o1
Y
M1
2
x
m1=y
K1
U
G=G1
U1
u1
N
21
L
F
u
pα
N1
L1
F1
l
t
pγ = t1
pβ
l1

2/4


nρ
z
mα
m
o
mγ
mβ
D
Z
W
V
E
1
T2
R
M
O
T
11
t2
W1
V1=o1
R1
K
X
Y
M1
2
m1=y
x
K1
T1
U
G=G1
U1
21
N
pρ=u1
L
F
u
pα
N1
L1
F1
l
t
pγ = t1
pβ
l1

3. Zadání:

A4 na výšku
(a) MP: $O[17;16]$
(b) KP: $O\ [7;16]$, $\omega = 135°$, $q = 1$

Küpperův konoid je určen těmito řídícími útvary:
a) kružnice $k(S,5)$, v půdorysně $\pi(x,y)$, $S[6;7;0]$
b) přímka l, $L \in l$, $l \perp \pi$, $L[1;7;0]$, $(L \in k)$
c) řídící rovina $\varphi(1, \infty, 1)$.
Zobrazte alespoň 21 tvořících přímek plochy.

Určete tečnou rovinu plochy v bodě $T[8;9;?]$, pomocí dotykového hyperbolického paraboloidu.

Zobrazte řez plochy rovinou ρ: $T \in \rho$, $\rho \parallel \pi$ a tečnu této křivky v bodě T.

(a)Postup:

1) Zobrazíme kružnici k a přímku l. Pomocí rovin rovnoběžných s řídící rovinou ($\alpha \parallel \varphi$) sestrojíme obrazy přímek konoidu (12, 12').

2)Bod T dourčíme s využitím půdorysu tvořící přímky $t = MN$.

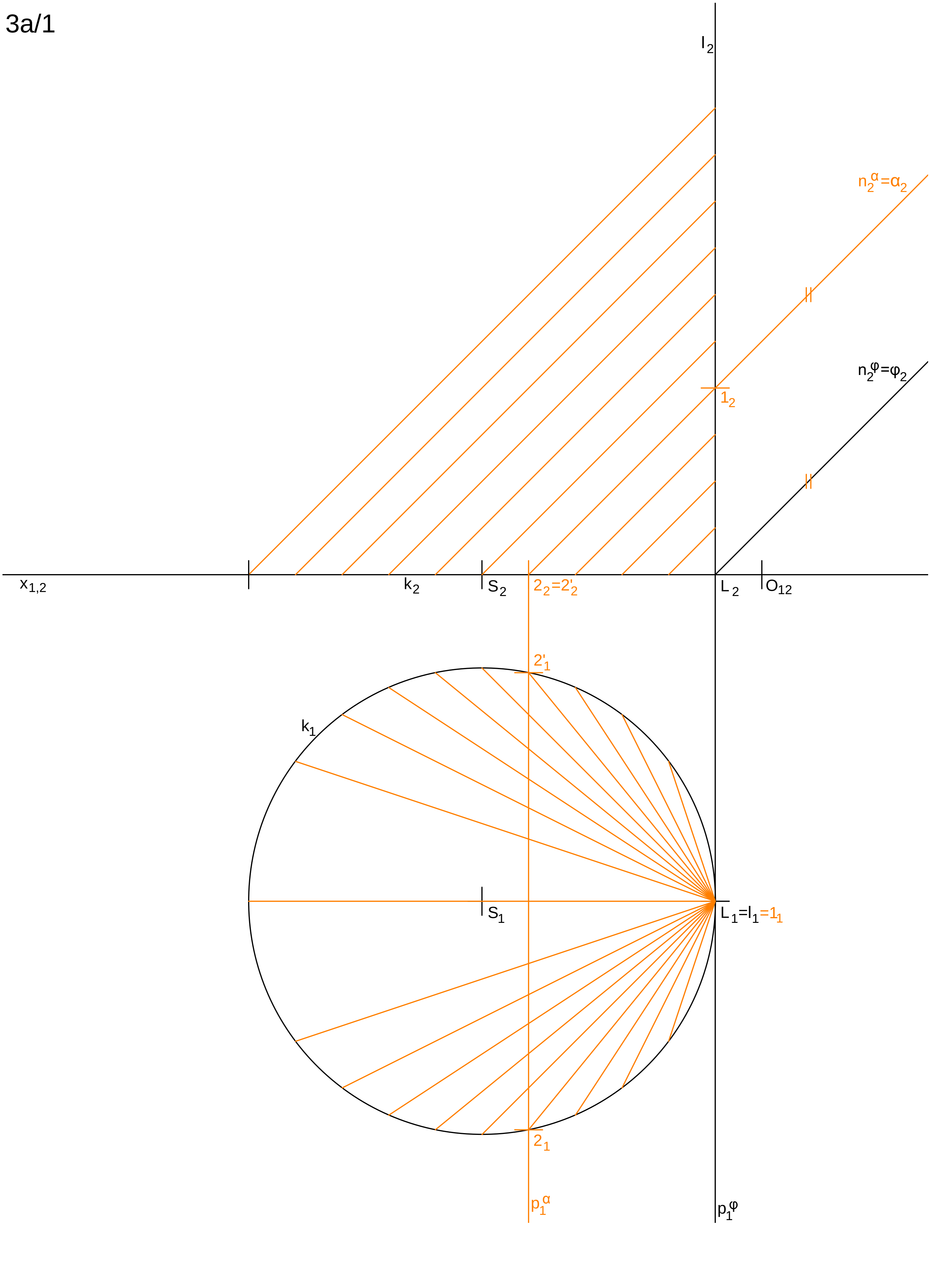
3)Pro tečnou rovinu využijeme dotykový hyperbolický paraboloid:
-tečná rovina v bodě M je určena přímkou t a tečnou m kružnice k v bodě M
-tečná rovina v bodě N je určena přímkou t a přímkou l.
Zvolíme bod G na přímce m a dourčíme zborcený čtyřúhelník $MGFN$. Úsečku GF rozdělíme bodem U v tom poměru, ve kterém bod T rozděluje úsečku MN. Tečná rovina v bodě T je určena přímkou t a přímkou $u = TU$.

4)Řez plochy rovinou ρ sestrojujeme bodově (viz bod 3, 3').

5)Tečna křivky řezu leží v rovině křivky (rovina ρ) a také v tečné rovině konoidu v bodě T. Tečna křivky řezu q je tedy průsečnice roviny ρ a tečné roviny τ (t, u).Využili jsme přímku NU a její průsečík R s ρ, $q = TR$.

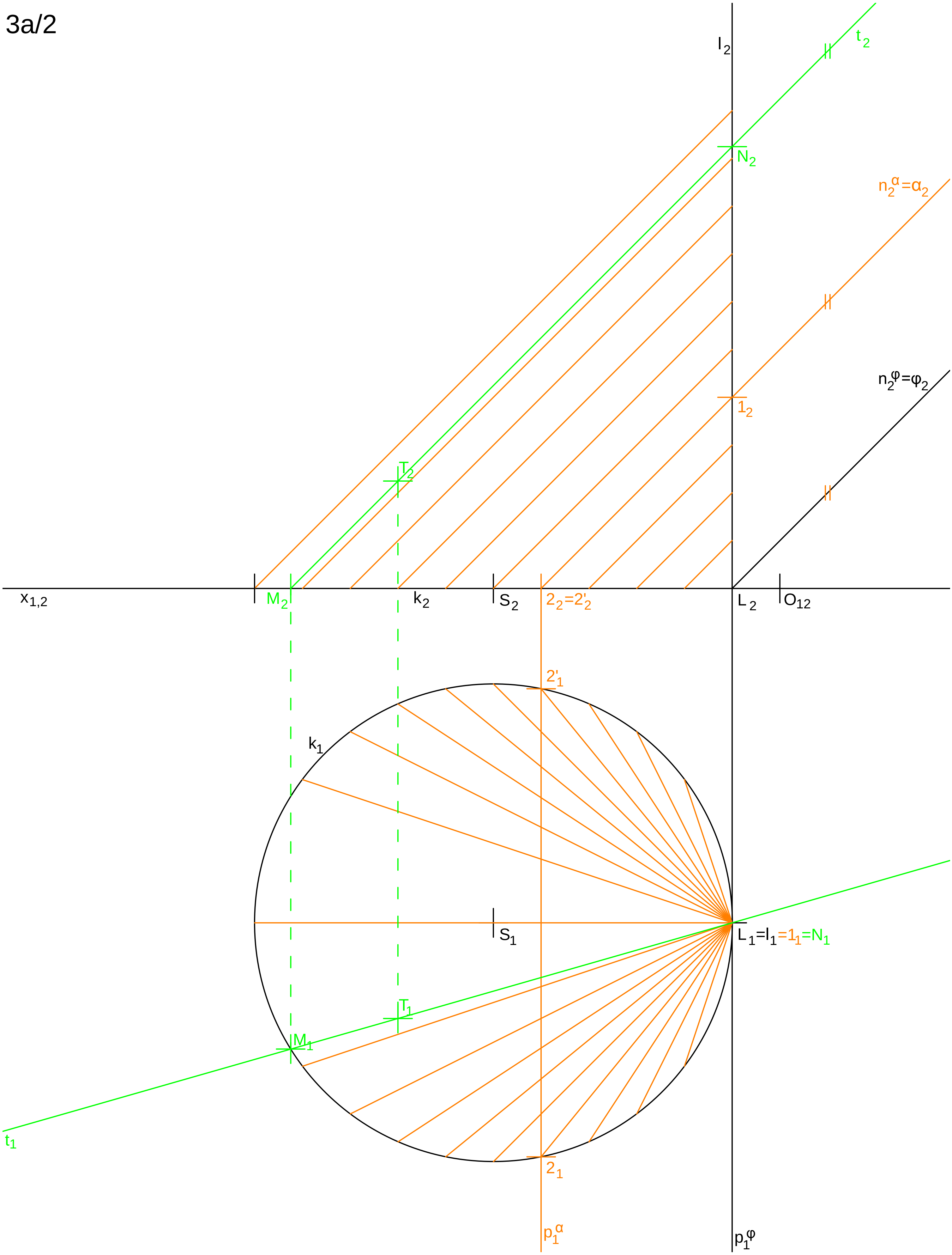
(b)Postup: Postupujeme stejně jako v MP.

3a/1



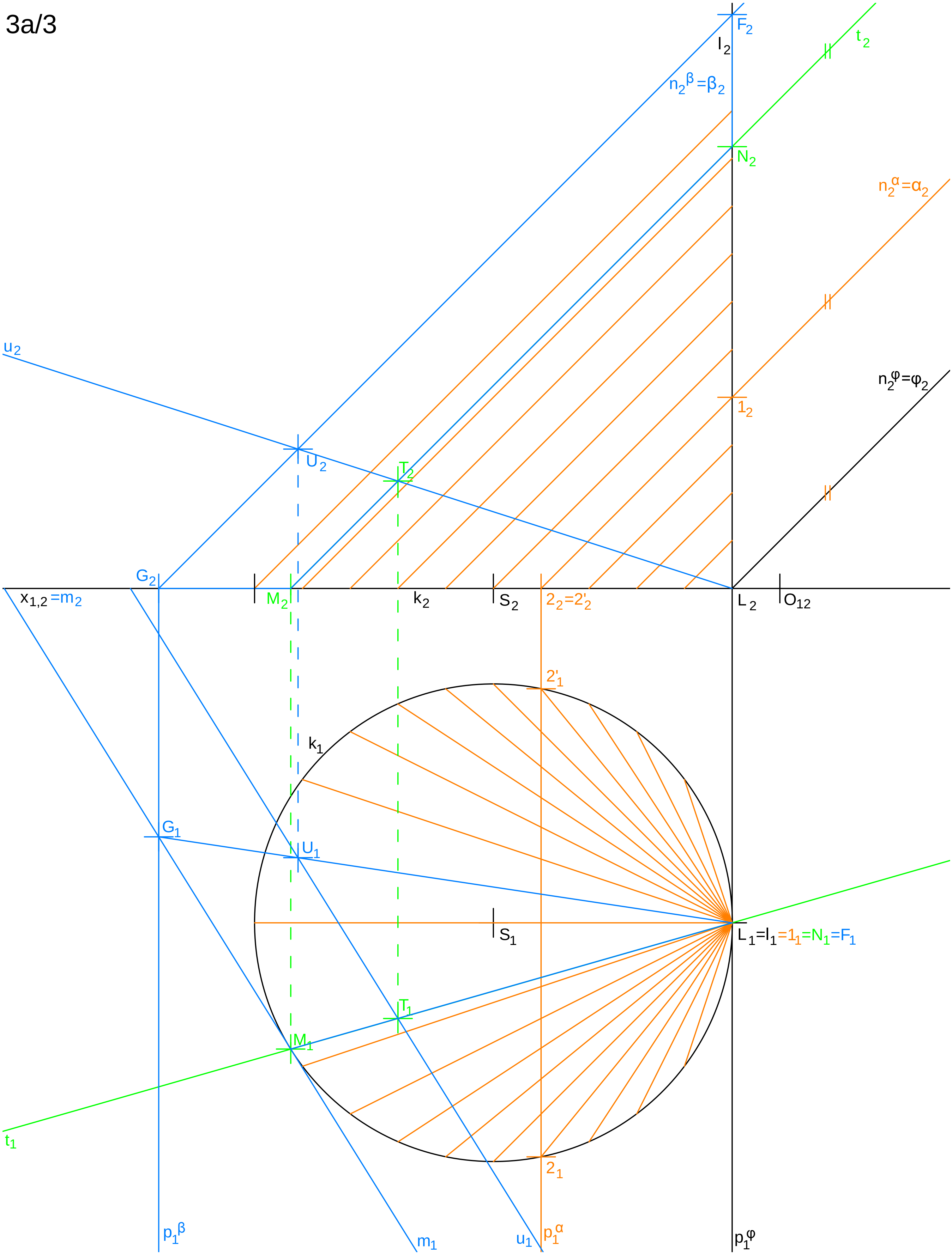
l2
n2α=α2
n2φ=φ2
12
x1,2
k2
S2
22=2'2
L 2
O12
2'1
k1
S1
L1=l1=11
21
p1α
p1φ

3a/2

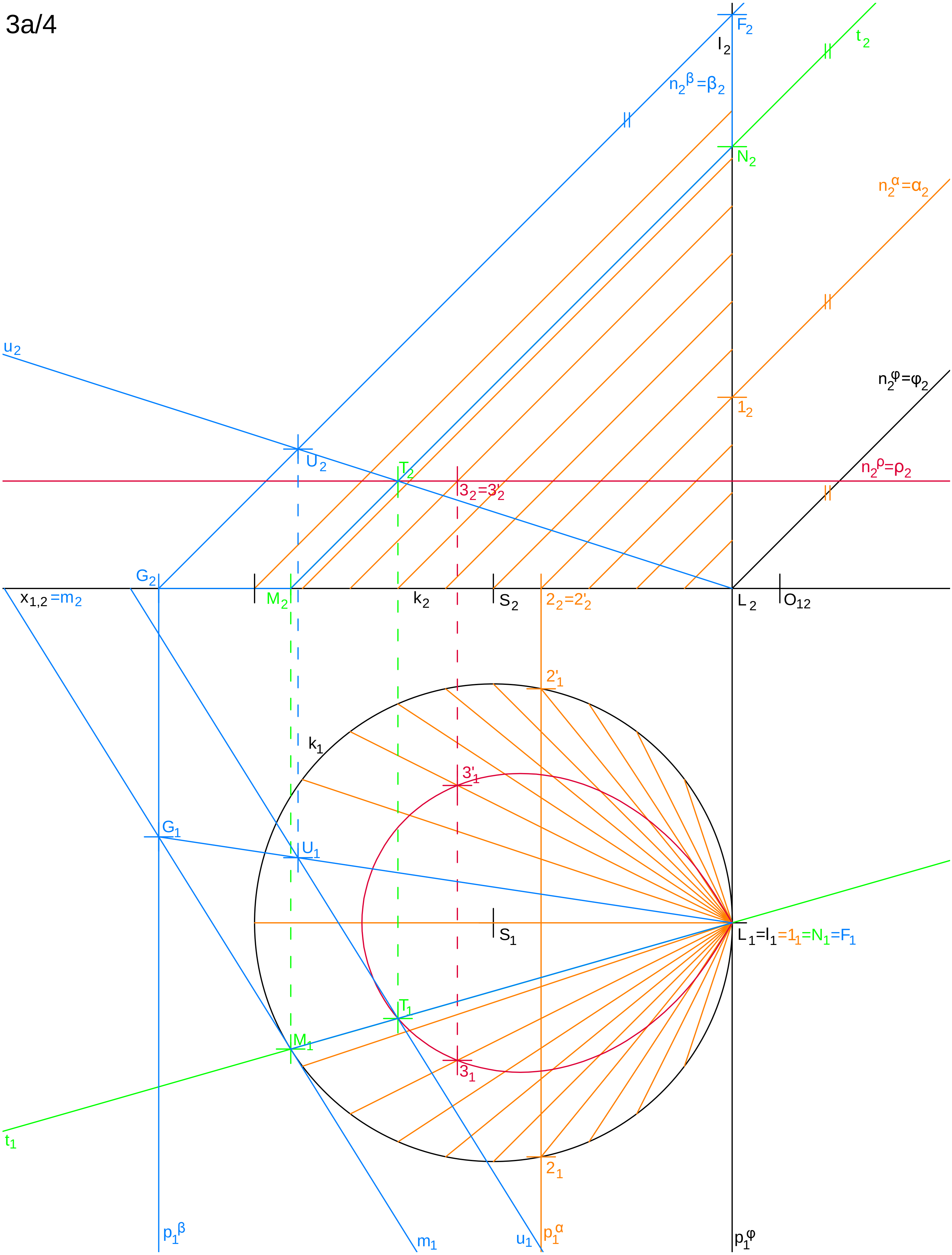


l_2
t_2
N_2
$n_2^\alpha=\alpha_2$
$n_2^\varphi=\varphi_2$
1_2
T_2
$x_{1,2}$
M_2
k_2
S_2
$2_2=2'_2$
L_2
O_{12}
$2'_1$
k_1
S_1
$L_1=l_1=1_1=N_1$
T_1
M_1
t_1
2_1
p_1^α
p_1^φ

3a/3

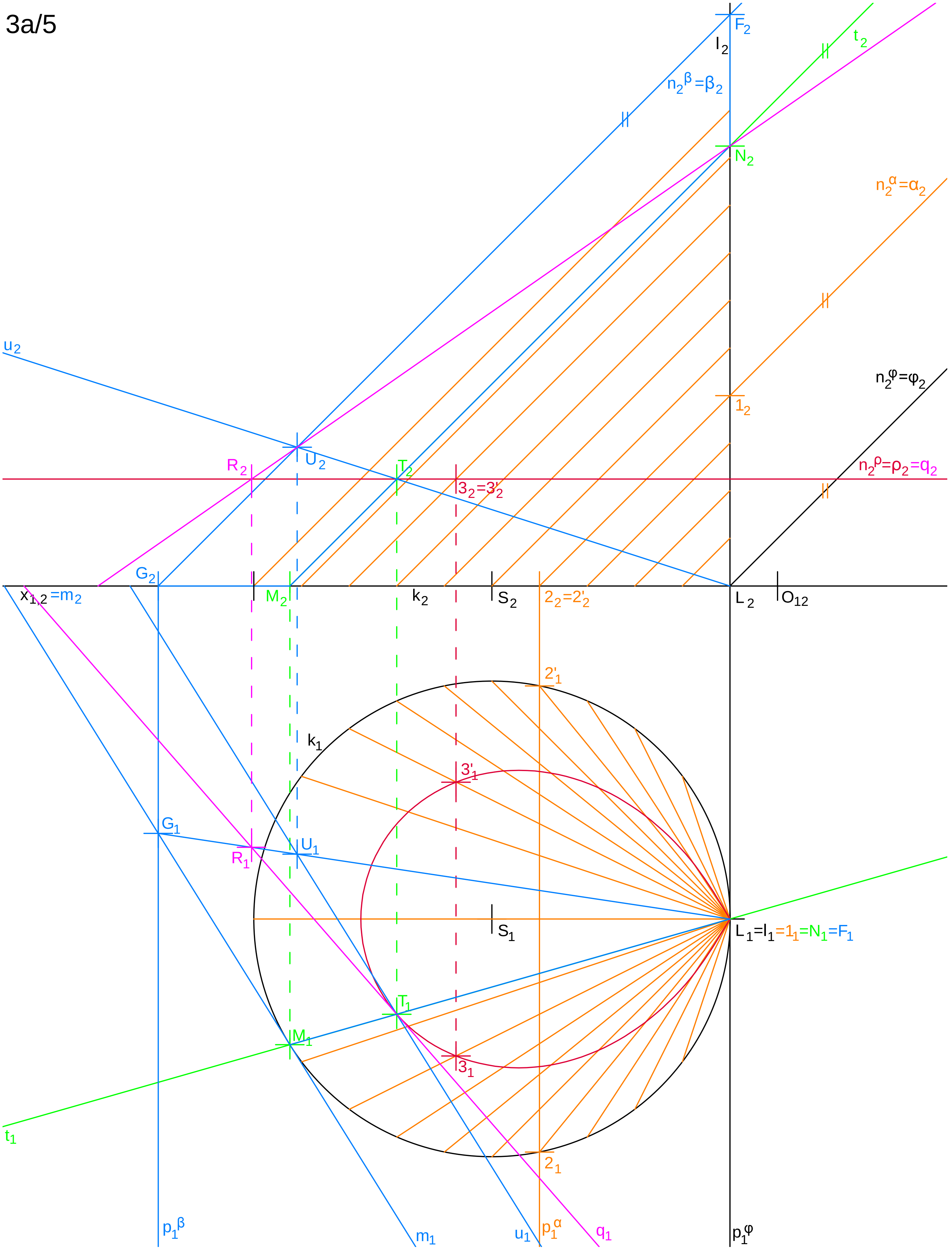

F2
l2
t2
n2β=β2
N2
n2α=α2
u2
1 2
n2φ=φ2
U2
T2
G2
x1,2=m2
M2
k2
S2
22=2'2
L2
O12
2'1
k1
G1
U1
S1
L1=l1=11=N1=F1
T1
M1
t1
21
p1β
m1
u1
p1α
p1φ

3a/4

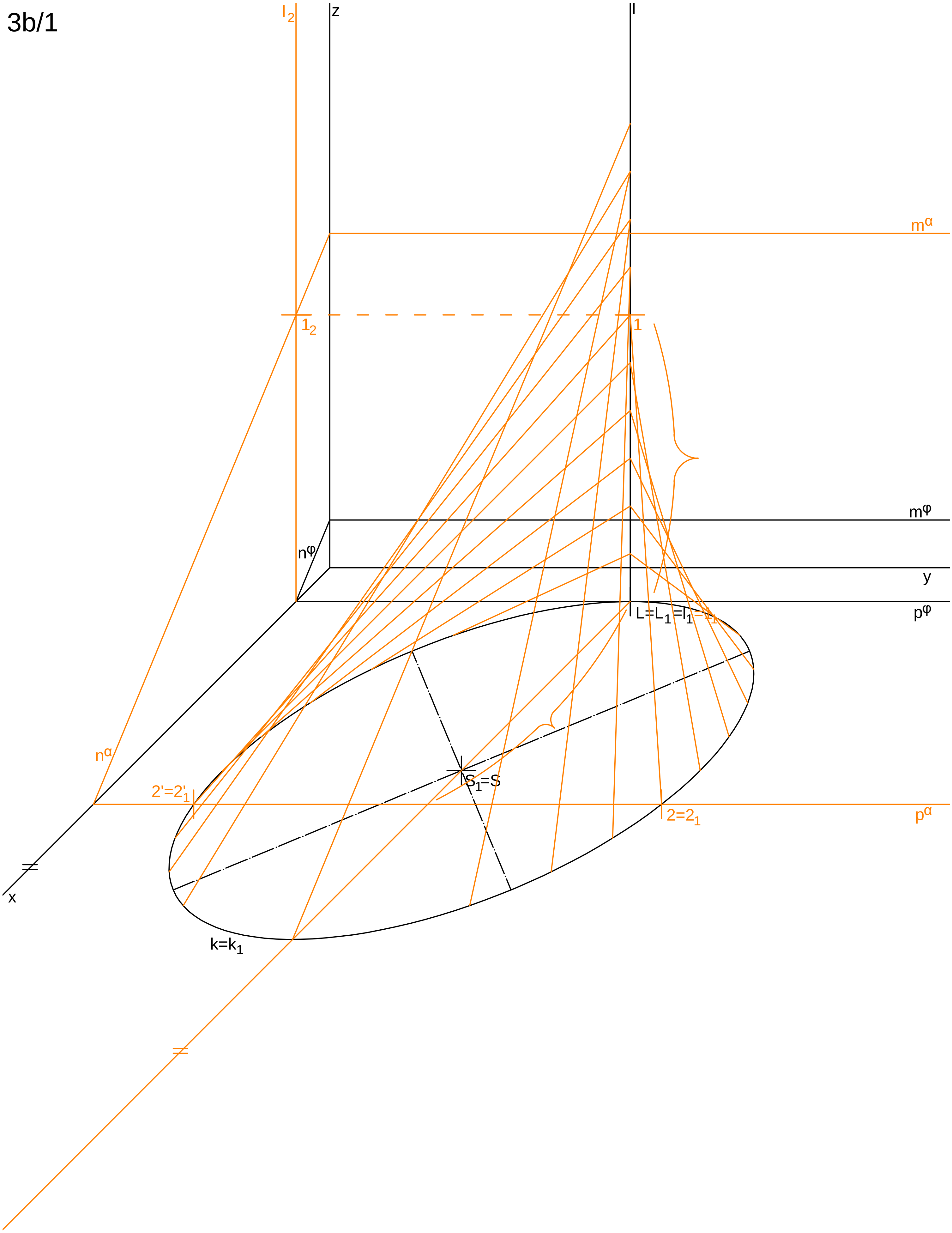


F_2
l_2
t_2
$n_2^{\beta}=\beta_2$
N_2
$n_2^{\alpha}=\alpha_2$
u_2
$n_2^{\varphi}=\varphi_2$
1_2
U_2
T_2
$3_2=3'_2$
$n_2^{\rho}=\rho_2$
G_2
$x_{1,2}=m_2$
M_2
k_2
S_2
$2_2=2'_2$
L_2
O_{12}
$2'_1$
k_1
$3'_1$
G_1
U_1
S_1
$L_1=l_1=1_1=N_1=F_1$
T_1
M_1
3_1
t_1
2_1
p_1^{β}
m_1
u_1
p_1^{α}
p_1^{φ}

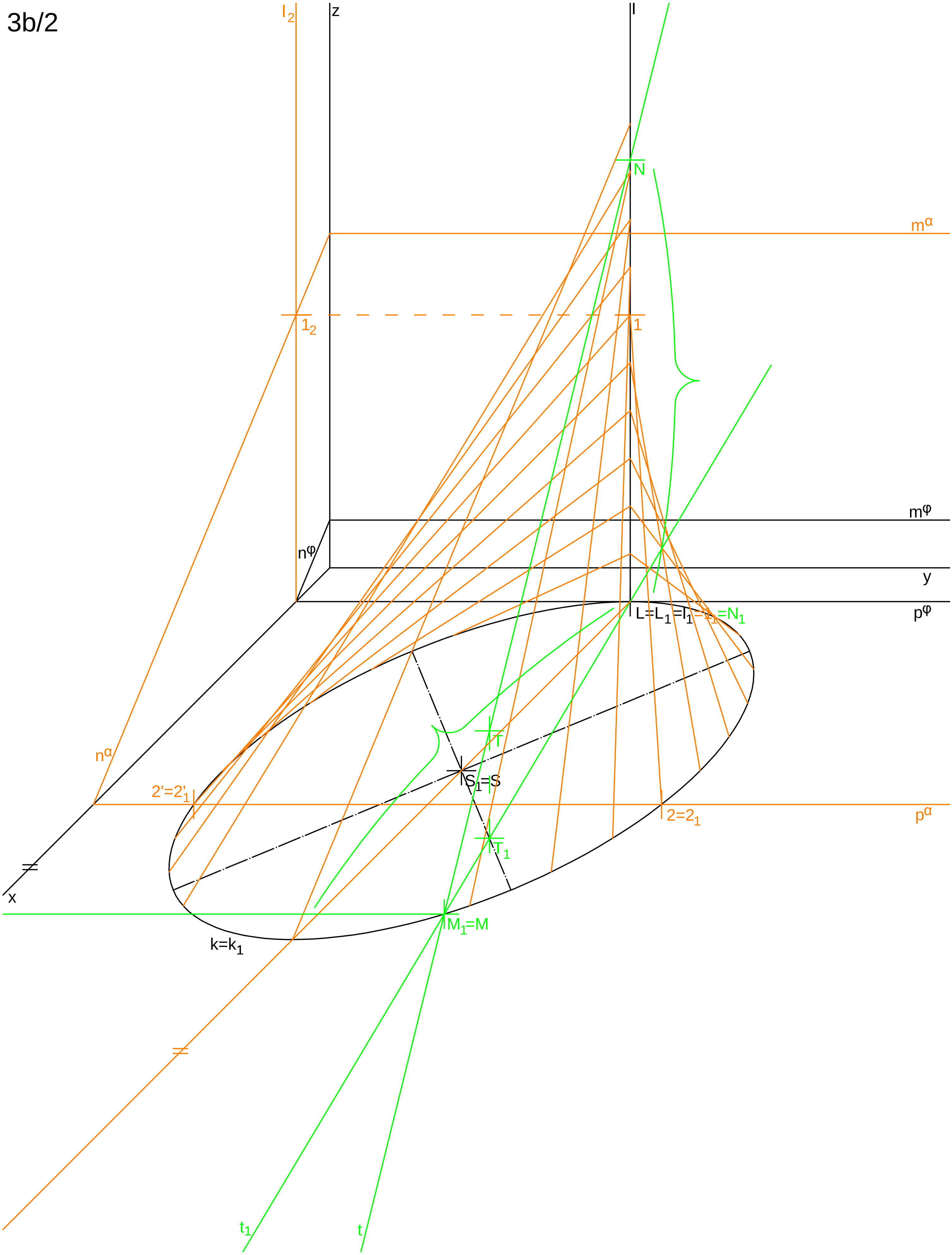
3a/5


F2
l2
t2
n2β=β2
N2
n2α=α2
u2
n2φ=φ2
12
U2
R2
T2
32=3'2
n2ρ=ρ2=q2
G2
x1,2=m2
M2
k2
S2
22=2'2
L2
O12
2'1
k1
3'1
G1
U1
R1
S1
L1=l1=11=N1=F1
T1
M1
31
t1
21
p1β
m1
u1
p1α
q1
p1φ

3b/1

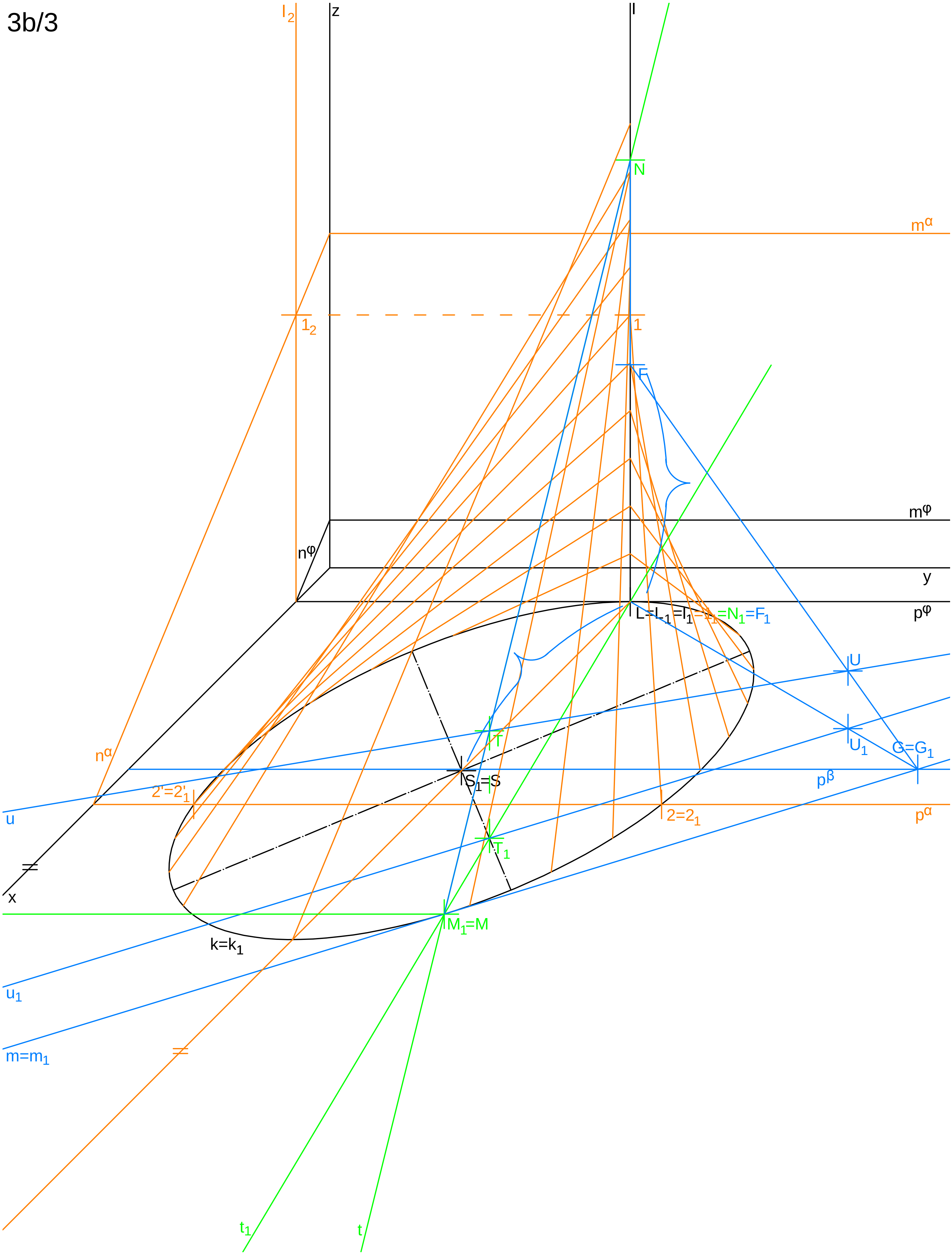


3b/2

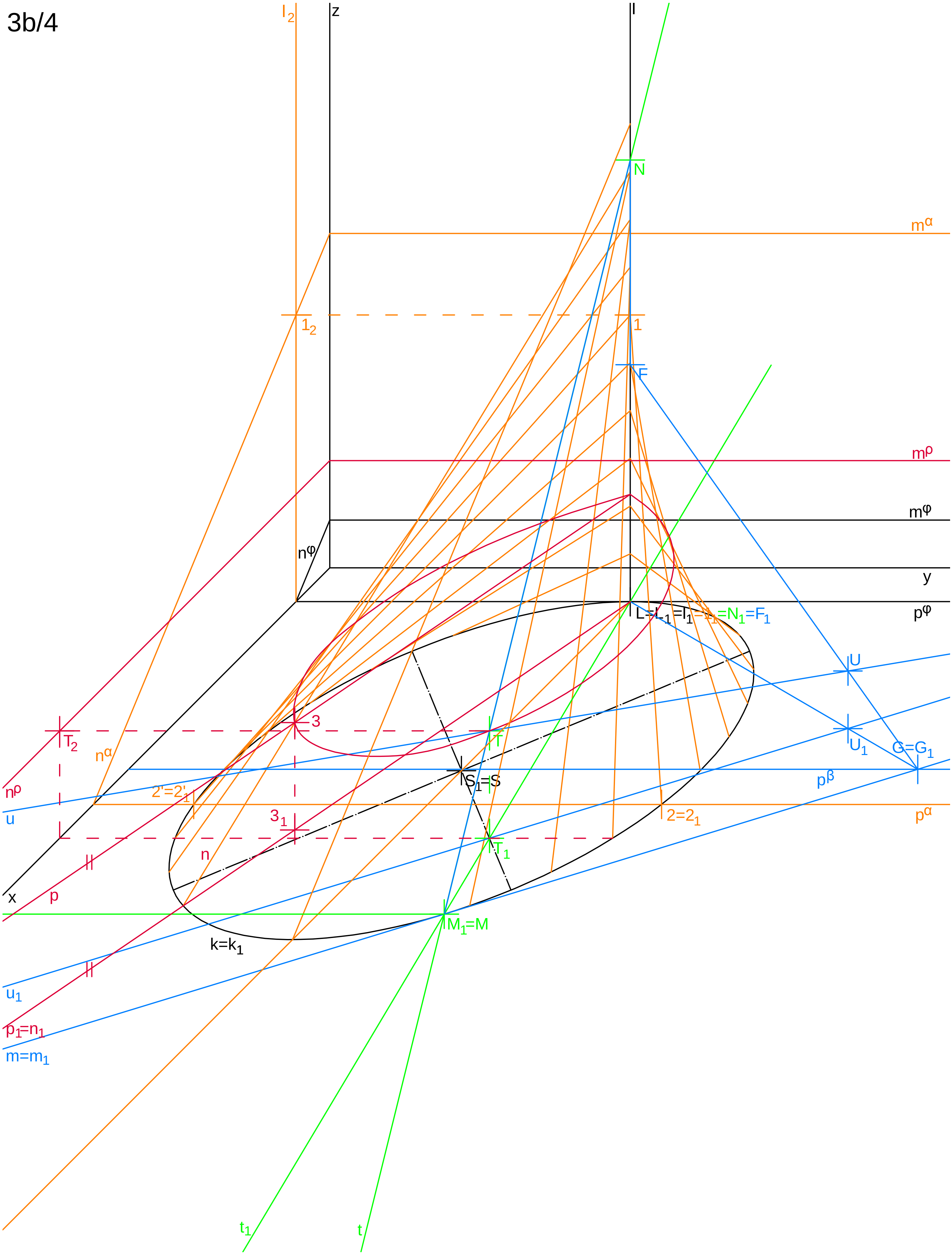


l2
z
l
N
mα
12
1
mφ
nφ
y
L=L1=l1=l1=N1
pφ
T
S1=S
nα
2'=2'1
2=21
pα
T1
x
M1=M
k=k1
t1
t

3b/3


l2
z
l
N
mα
12
1
F
mφ
nφ
y
pφ
L=L1=l1=11=N1=F1
U
U1
G=G1
T
S1=S
pβ
nα
2'=2'1
2=21
pα
u
T1
x
M1=M
k=k1
u1
m=m1
t1
t

3b/4


l_2
z
l
N
m^α
1_2
1
F
m^ρ
m^φ
n^φ
y
$L=L_1=l_1=1_1=N_1=F_1$
p^φ
U
U_1
$G=G_1$
p^β
p^α
$2=2_1$
T
$S_1=S$
3
T_2
n^α
n^ρ
u
$2'=2'_1$
3_1
n
T_1
x
p
$M_1=M$
$k=k_1$
u_1
$p_1=n_1$
$m=m_1$
t_1
t

3b/5

l2
z
l
N
mα
12
1
F
mρ
q
y
R
L=L1=l1=11=N1=F1
r
U
q1
r1
R1
3
T2
T
U1
G=G1
nα
S1=S
pβ
nρ
2'=2'1
u
31
2=21
pα
n
T1
x
p
M1=M
k=k1
u1
p1=n1
m=m1
t1
t

4. Zadání:

A4 na výšku
<u>PA</u>: ΔXYZ, X [5;11], $|XY| = 12$, izometrie

Je dána rotační válcová plocha s řídící kružnicí $k(O; 4{,}5)$ v půdorysně $\pi(x,y)$ a rovina $\rho(\infty; 4{,}5; 4{,}5)$
Plückerův konoid je určen těmito řídícími útvary:
a) elipsa e, která je průnikem zadané válcové plochy a roviny ρ,
b) přímka l, $L \in l$, $l \perp \pi$, L[0;4,5;0]
c) řídící rovina φ je půdorysna $\pi(x,y)$.
Zobrazte nejméně 13 tvořících přímek plochy.

Určete tečnou rovinu plochy v bodě T[2,5;1;?], pomocí dotykového hyperbolického paraboloidu.

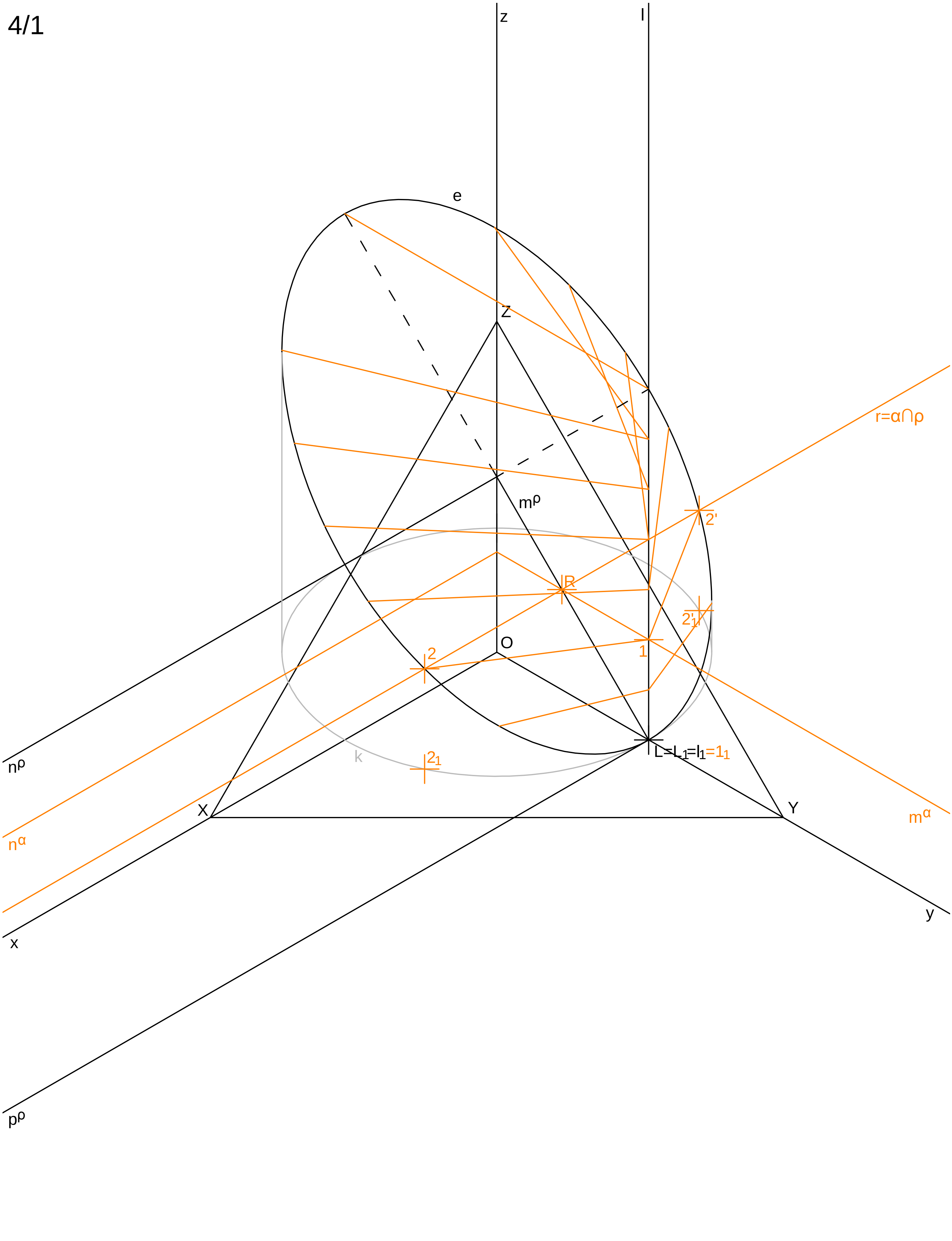
Postup:

1) Zobrazíme elipsu e a přímku l. Pomocí rovin rovnoběžných s řídící rovinou ($\alpha \| \varphi$) sestrojíme obrazy přímek konoidu (12, 12').

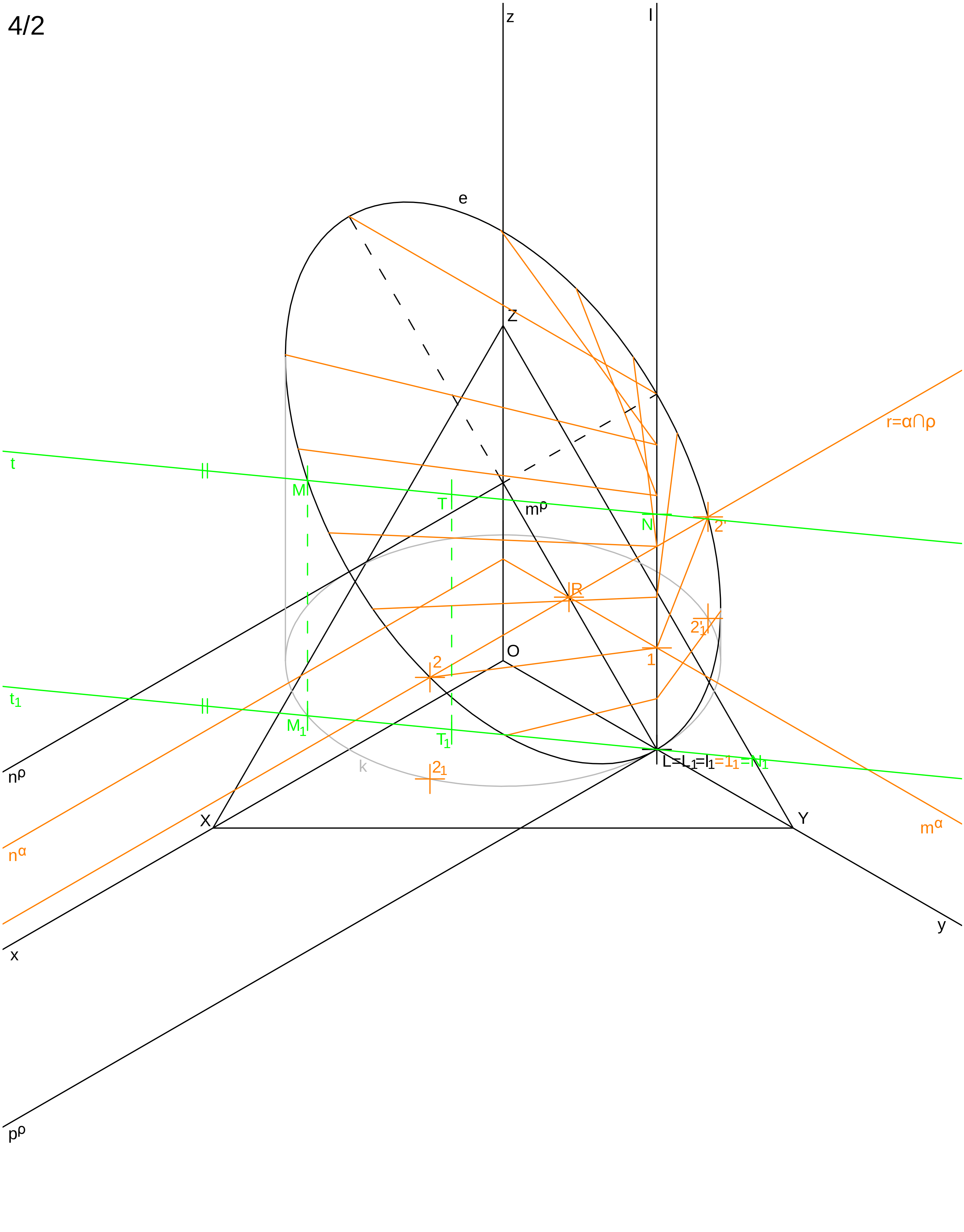
2) Bod T dourčíme s využitím půdorysu tvořící přímky $t = MN$.

3) Pro tečnou rovinu využijeme dotykový hyperbolický paraboloid:
-tečná rovina v bodě M je určena přímkou t a tečnou m elipsy v bodě M
-tečná rovina v bodě N je určena přímkou t a přímkou l.
Zvolíme bod G na přímce m a dourčíme zborcený čtyřúhelník $MGFN$. Úsečku GF rozdělíme bodem U v tom poměru, ve kterém bod T rozděluje úsečku MN. Tečná rovina v bodě T je určena přímkou t a přímkou $u = TU$.

4/1

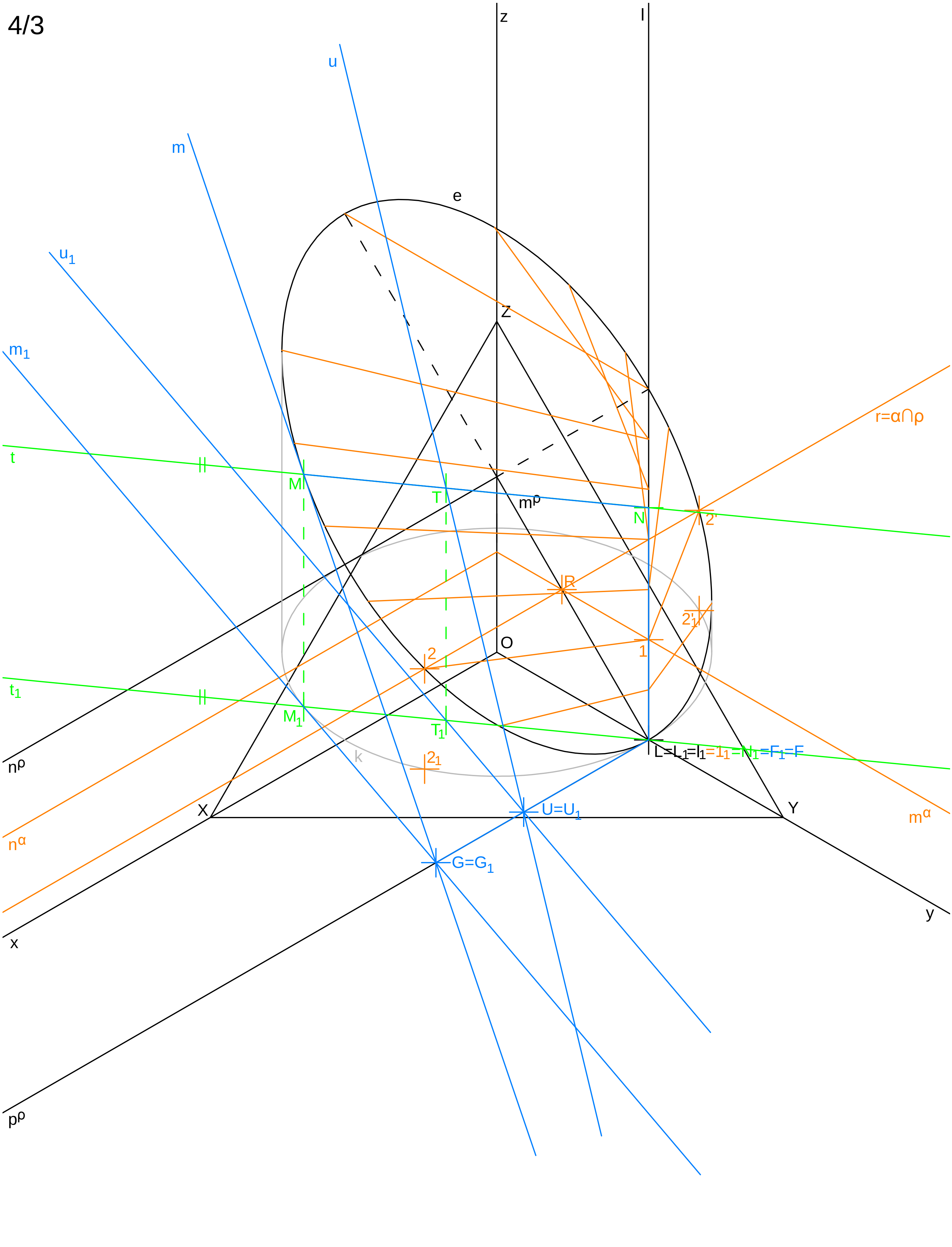


4/2



z
l
e
Z
r=α∩ρ
t
M
T
mρ
N
2'
R
2'1
O
1
2
t1
M1
T1
k
21
L=L1=l1=11=N1
nρ
X
Y
mα
nα
x
y
pρ

4/3


z
l
u
m
e
u_1
m_1
Z
$r = \alpha \cap \rho$
t
M
T
m^ρ
N
2'
R
$2'_1$
O
1
2
t_1
M_1
T_1
$L=L_1=l_1=1_1=N_1=F_1=F$
n^ρ
k
2_1
X
$U=U_1$
Y
m^α
n^α
$G=G_1$
y
x
p^ρ

5. Zadání:

A4 na výšku
MP: O [8;15]

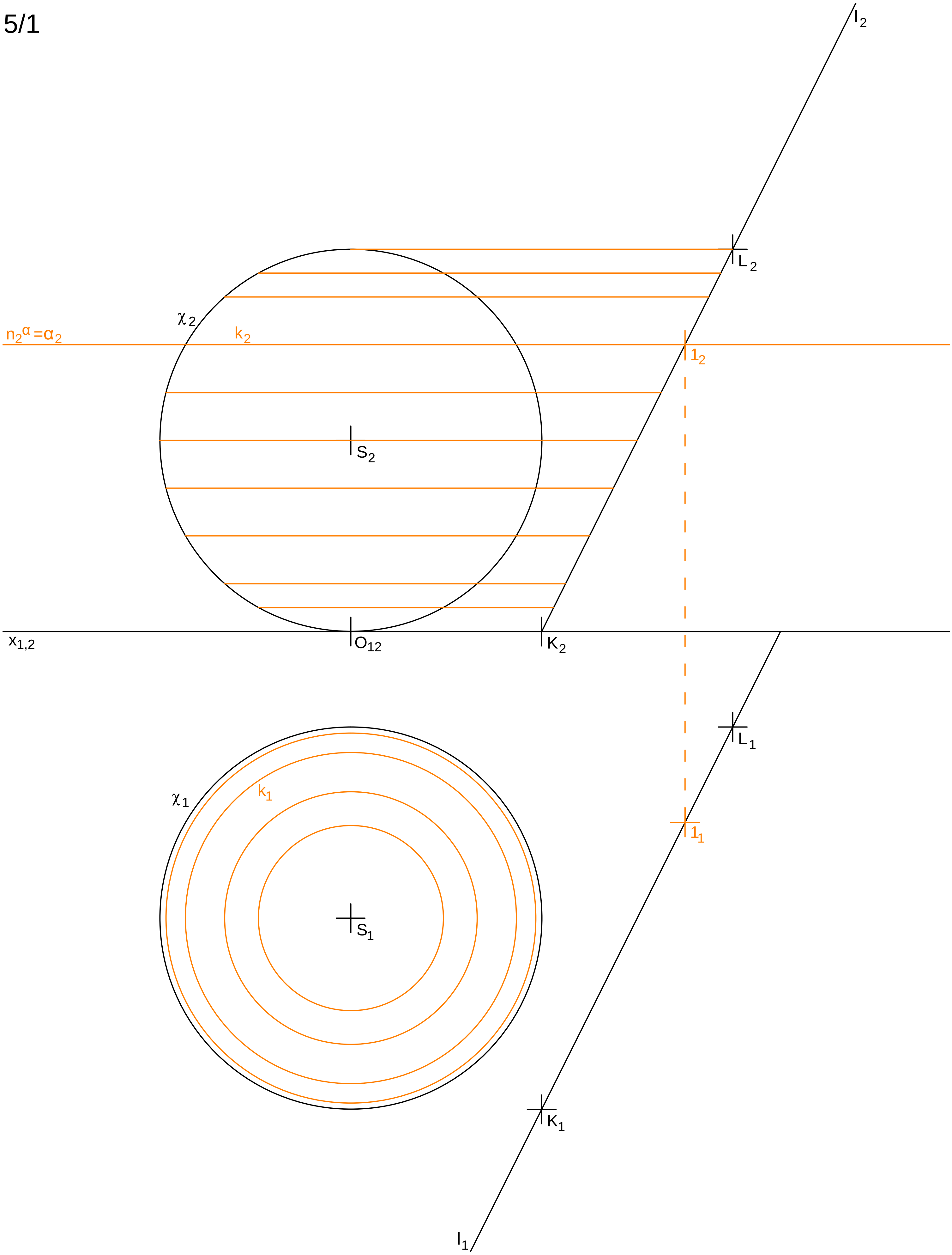
Kulový konoid je určen těmito řídícími útvary:
a) kulová plocha $\chi(S, 4)$, $S[0;6;4]$,
b) přímka $l = KL$, $K[-4;10;0]$, $L[-8;2;8]$,
c) řídící rovina φ je půdorysna $\pi(x,y)$.
Zobrazte nejméně 20 tvořících přímek konoidu a křivku spojující dotykové body těchto přímek s kulovou plochou (včetně viditelnosti v půdoryse a náryse).

Postup:

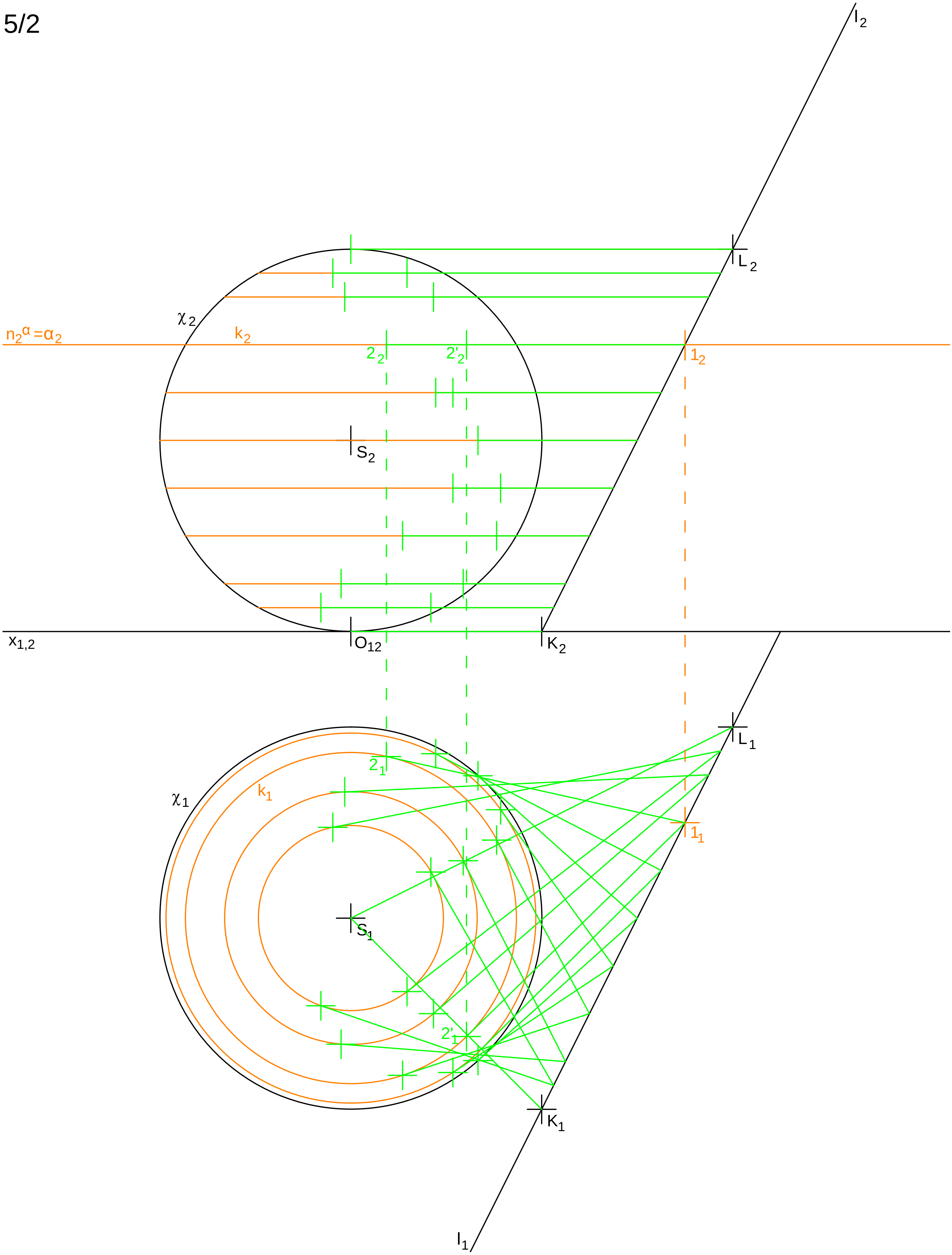
1) Tvořící přímky tohoto speciálního konoidu jsou přímky, které protínají zadanou přímku l, dotýkají se zadané kulové plochy a jsou rovnoběžné s půdorysnou π.
Zvolíme libovolnou rovinu α rovnoběžnou s půdorysnou. Tato rovina protíná přímku l v bodě 1 a kulovou plochu v kružnici k. Přímky konoidu jsou tečny kružnice k procházející bodem 1, body dotyku označme 2, 2'.

2) Spojíme dotykové body přímek konoidu s kulovou plochou a stanovíme viditelnost. Změna viditelnosti v půdoryse: P_1, Q_1; změna viditelnosti v náryse: U_2, V_2.

5/1

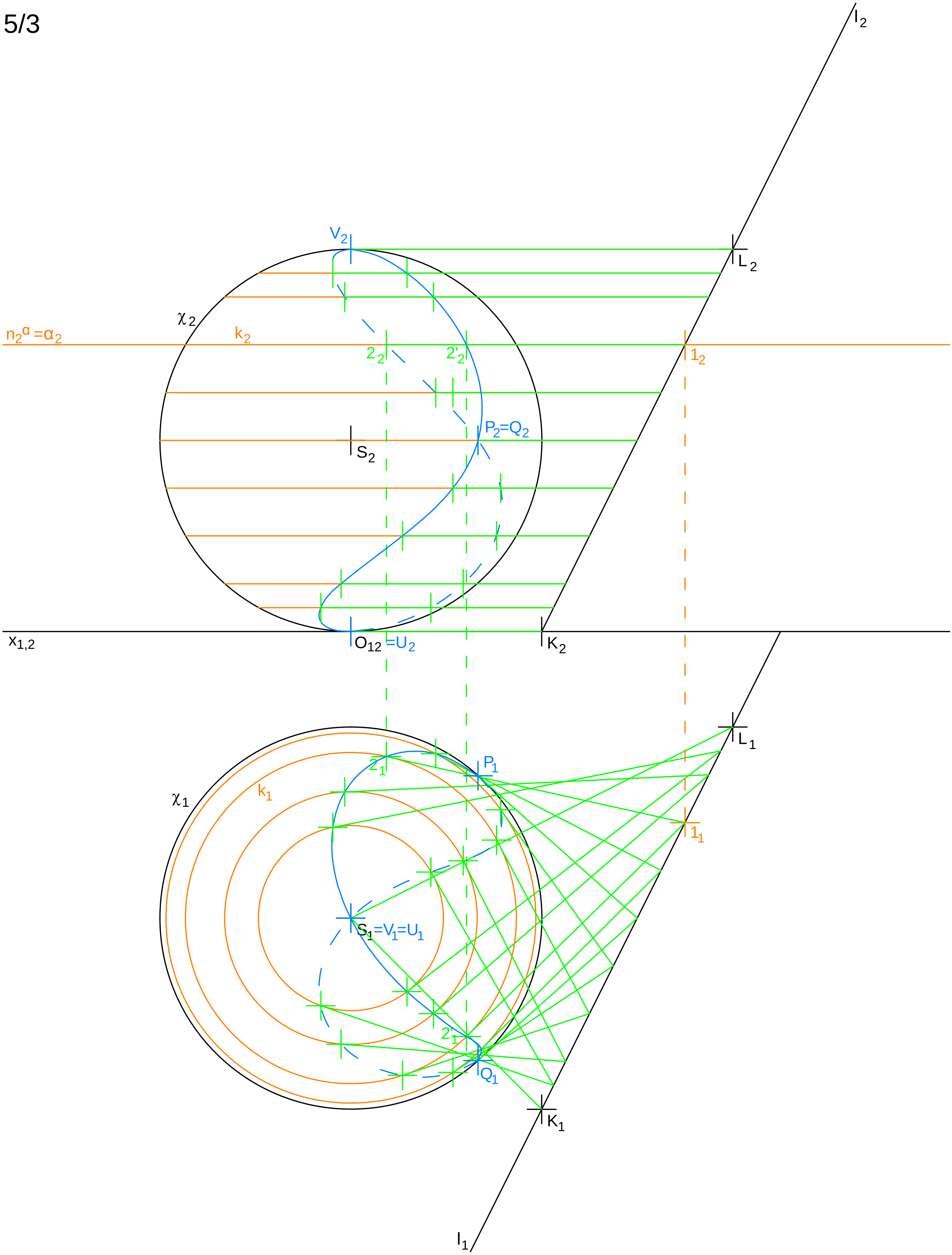


5/2



l_2
L_2
χ_2
$n_2^{\alpha} = \alpha_2$
k_2
2_2
$2'_2$
1_2
S_2
$x_{1,2}$
O_{12}
K_2
L_1
2_1
k_1
χ_1
1_1
S_1
$2'_1$
K_1
l_1

5/3

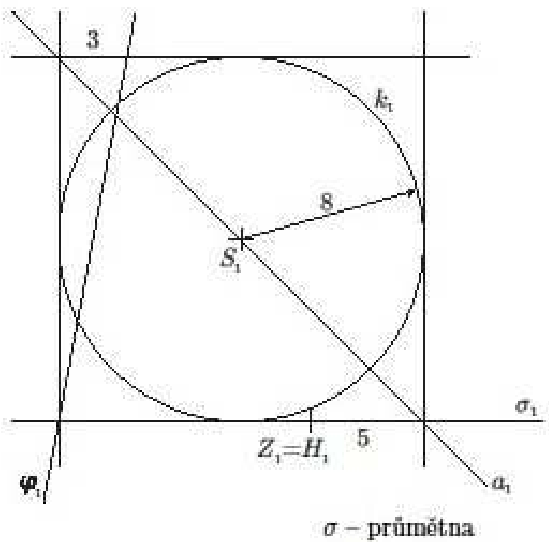


l_2
V_2
L_2
χ_2
$n_2^\alpha = \alpha_2$
k_2
2_2
$2'_2$
1_2
$P_2 = Q_2$
S_2
$x_{1,2}$
$O_{12} = U_2$
K_2
L_1
P_1
2_1
χ_1
k_1
1_1
$S_1 = V_1 = U_1$
$2'_1$
Q_1
K_1
l_1

6. Zadání:

A4 na výšku
<u>LP</u>: *Z* [12;10], $v_h = 10$, $d = 36$

Kruhový konoid je určen těmito řídícími útvary:
a) kružnice $k(S,8)$, v základní rovině π,
b) přímka $a \parallel \pi$ (nad π), vzd$(a, \pi) = 8$
c) řídící rovina $\varphi \perp \pi$.
Zobrazte nejméně 15 tvořících přímek konoidu.

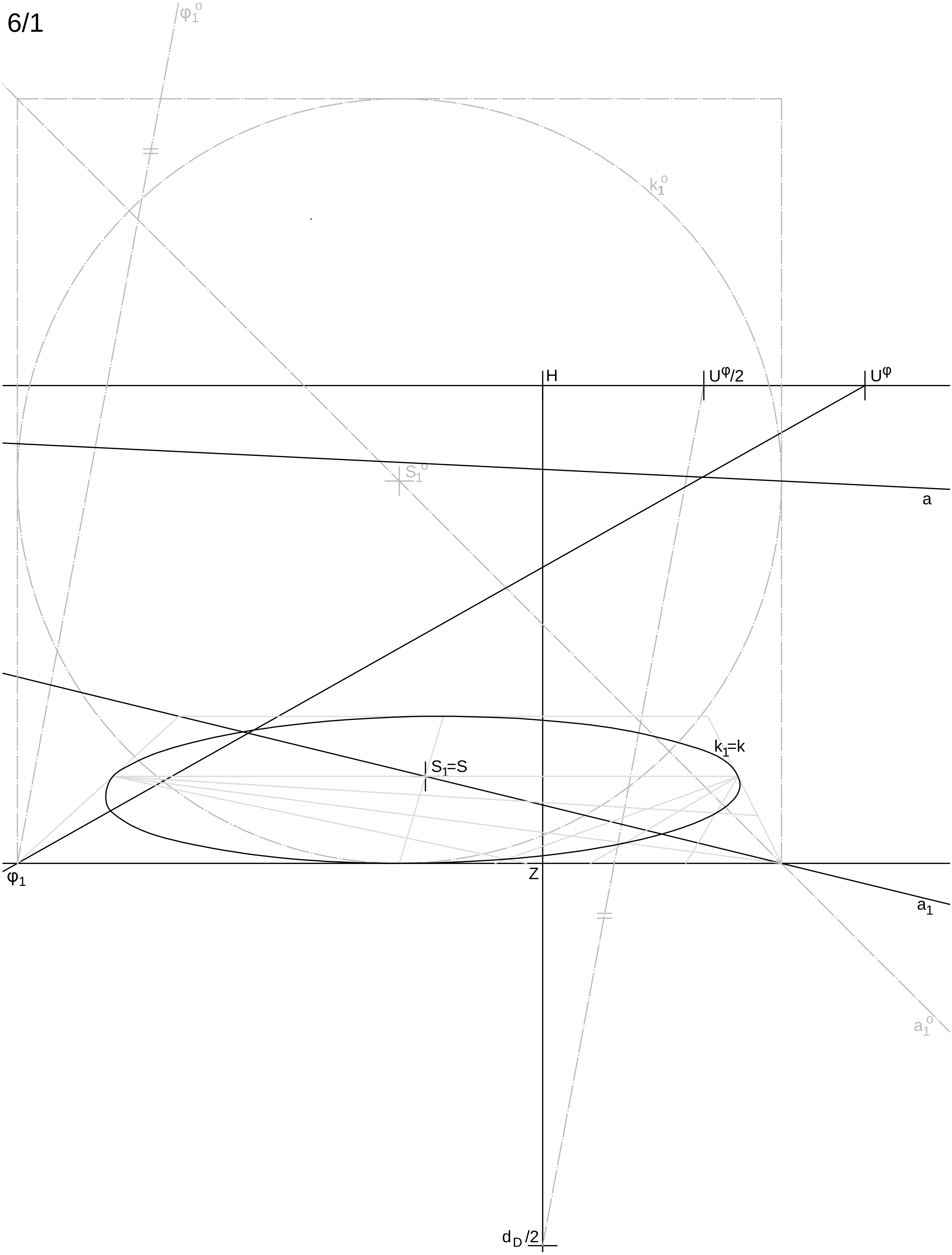


Postup:

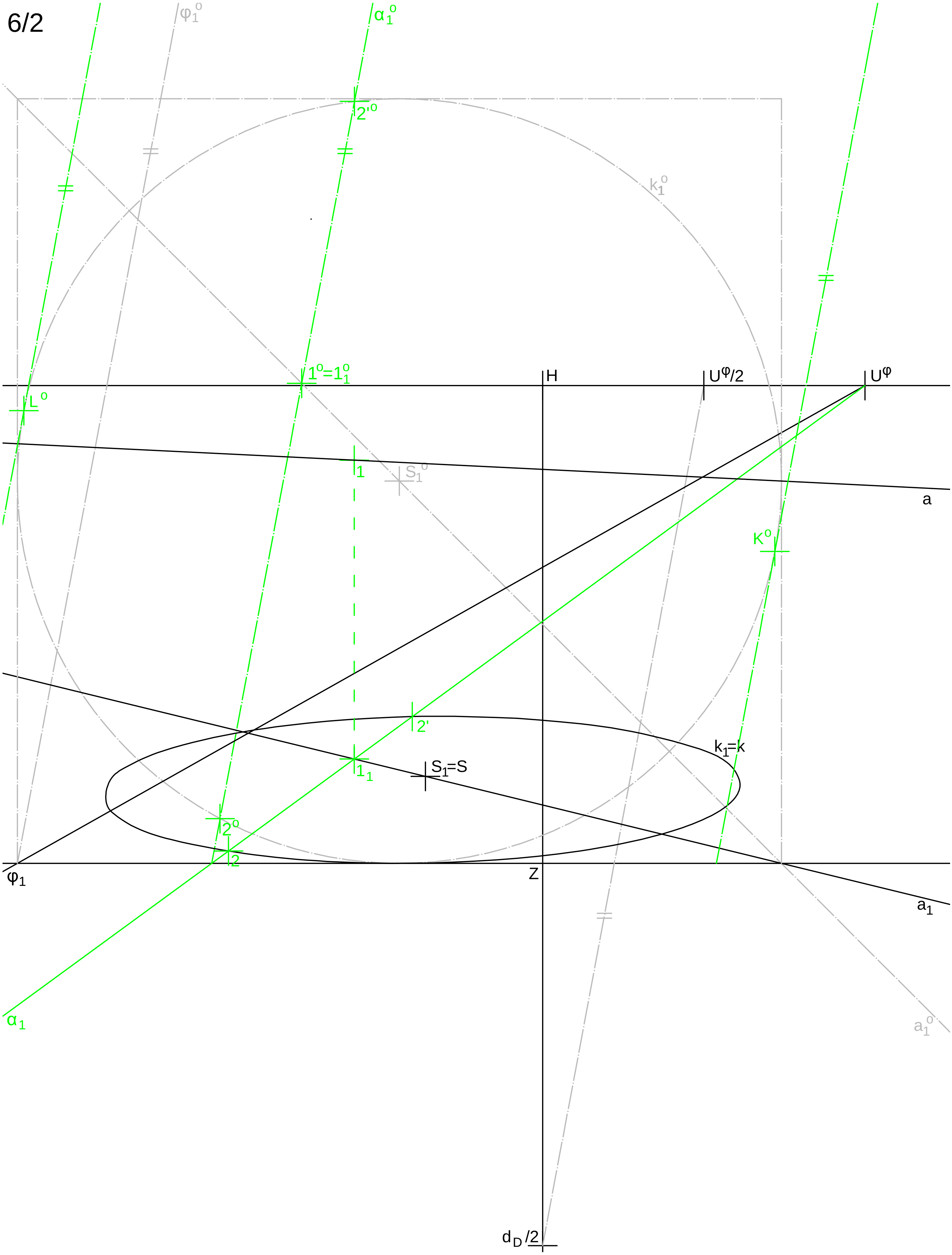
1) Zobrazíme kružnici *k* a přímku *a*. Půdorysy přímek konoidu jsou rovnoběžné s φ_1, v LP se zobrazí jako přímky různoběžné se společným úběžníkem U^{φ}. Zobrazíme přímky konoidu.

2)Na přímce 12 konoidu zvolte bod *T* a dourčete tečnou rovinu plochy v bodě *T*. Nezapomeňte, že se v LP dělící poměr nezachovává.
Pro tečnou rovinu využijeme dotykový hyperbolický paraboloid:
-tečná rovina v bodě *M* je určena přímkou *t* a tečnou *m* kružnice v bodě *M*
-tečná rovina v bodě *N* je určena přímkou *t* a přímkou *l*.
Zvolíme bod *G* na přímce *m* a dourčíme zborcený čtyřúhelník *MGFN*. Úsečku *GF* rozdělíme bodem *U*, použijeme stejný způsob jako v předešlých příkladech. Tečná rovina v bodě *T* je určena přímkou *t* =12 a přímkou *u* = *UT*.

6/1

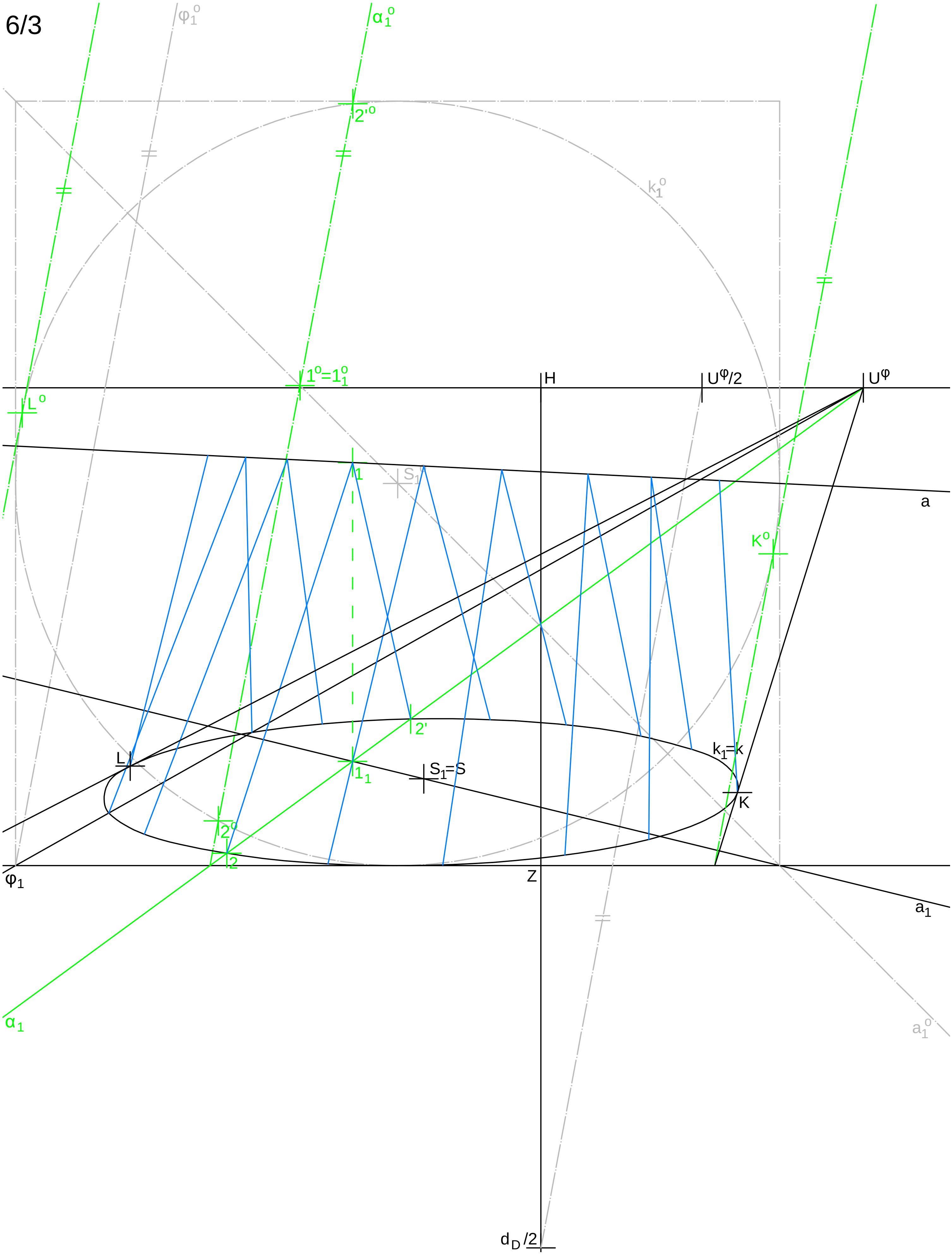


6/2

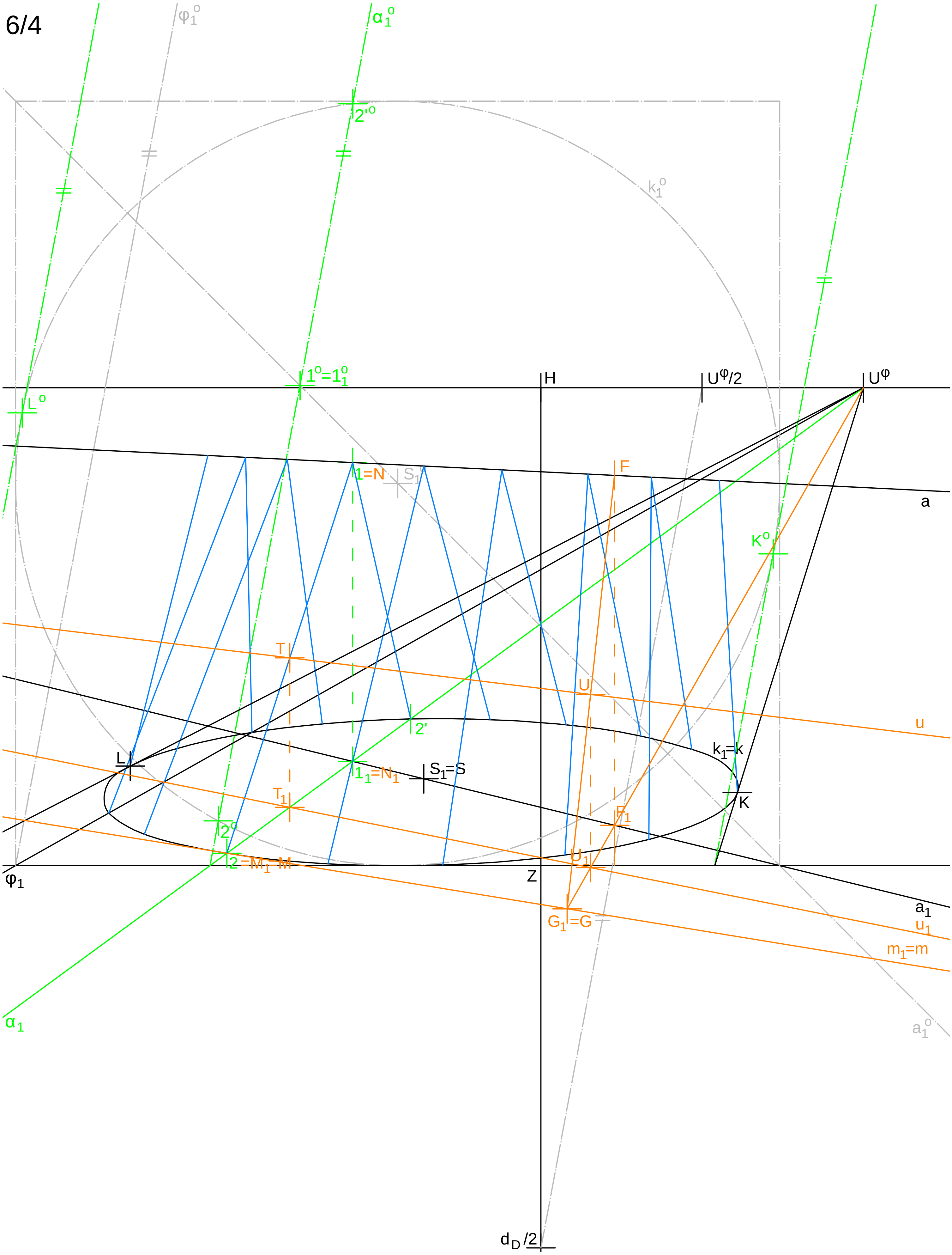


φ1o
α1o
2'o
k1o
1o=11o
H
Uφ/2
Uφ
Lo
1
S1o
a
Ko
2'
k1=k
S1=S
11
2o
2
Z
φ1
a1
α1
a1o
dD/2

6/3


φ1o
α1o
2'o
k1o
1o=1o1
H
Uφ/2
Uφ
Lo
1
S1
a
Ko
2'
k1=k
L
S1=S
11
K
2o
2
φ1
Z
a1
α1
a1o
dD /2

6/4



φ1o
α1o
2'o
k1o
1o=1o1
Lo
H
Uφ/2
Uφ
F
1=N
S1
a
Ko
T
U
u
2'
k1=k
L
S1=S
11=N1
T1
K
F1
2o
U1
2=M1=M
φ1
Z
G1=G
a1
u1
m1=m
α1
a1o
dD /2